Gisela Ulmann

Zahlbegriff versus Rechnen – oder „Handlungsmagik" und Probleme mit „Identität"?

Wer sich damit beschäftigt, wie Kinder heutzutage ins mathematische Denken eingeführt werden (sollen) und nach den psychologischen Grundlagen sucht, stößt zwangsläufig auf Piaget - und gerade die von Piaget 1941 veröffentlichten Untersuchungen zur Entwicklung des *Zahlbegriffs*[1] tauchen in nahezu allen Lehrbüchern, die sich mit „kognitiver Entwicklung" beschäftigen, auf. Seine Ergebnisse bzw. deren Interpretationen werden einerseits als „Fakten" dargestellt - andererseits sind sie innerhalb psychologischer Forschung vielfach diskutiert, kritisiert, seine Untersuchungen sind vielfach wiederholt bzw. variiert worden.

Insbesondere kritische und variierende Untersuchungen sind Legion. Die allermeisten lassen sich so zusammenfassen:
- es gibt Kinder, die die von Piaget verwendeten Aufgaben „früher", also in jüngerem Alter, lösen, als Piaget dies angibt;
- Kinder haben eher sprachliche als logische Probleme, verstehen die entsprechenden Fragen nicht, deuten sie um etc.

Der erste genannte Kritikpunkt ist insofern eigentlich gegenstandslos, weil in Piagets Daten auch große Varianzen bezüglich des Alters bestehen, andererseits jedoch wiederum ernst zu nehmen, da daraus folgt, daß altersmäßige Stufen, wie Piaget sie selbst angibt, nur der Tendenz nach bestehen.

Zum zweiten Kritikpunkt wäre zu fragen, worin denn die sprachlichen Probleme genau bestehen und inwiefern diese Probleme nicht doch logische Schwierigkeiten widerspiegeln.

Soweit ich sehe, ist bislang nicht in Frage gestellt worden, ob Piaget überhaupt „psychologische" Aussagen über die (kognitive) Entwicklung von Kindern macht. Sein Lebenswerk bezeichnet Piaget selbst als „genetische Erkenntnistheorie"; seine Fragestellung bezieht sich darauf, wie die Operationen und Begriffe der Erkenntnis entstehen (vgl. 1970, S. 7). Um eine „Genese" dieser Operationen und Begriffe nachzuweisen, genügt es im Grunde genommen, je eine einzige „Vorform" aufzuzeigen. Vorformen hat Piaget zweifelsohne aufgewiesen - an Kindern, die jünger als 12 Jahre alt waren. Da Piaget weiterhin nachweisen wollte,

---

[1] Wegen der historischen Korrektheit werden Piagets Werke im Text immer mit dem Jahr genannt, in der das Werk im Original erschienen ist. Die Seitenzahlen beziehen sich jedoch auf die im Literaturverzeichnis angegebene deutsche Ausgabe.

daß diese „Genese“ ein aktiver Konstruktionsprozeß ist, genügt es im Grunde, zumindest *einen* entsprechenden „Übergang“ von einer Vorform zur anderen aufzuweisen. Auch dies hat Piaget getan. Für eine genetische Erkenntnistheorie ist es ohne Belang zu belegen, daß alle Kinder in derartigen Vorformen denken und es muß auch nicht belegt werden, daß alle Menschen die Übergänge genau so konstruieren.

Bei den Operationen und Begriffen, die Piaget untersuchte, handelt es sich um universelle, dennoch aber gesellschaftliche, Denkformen. „Universell“ bedeutet, daß es Menschen zukommt, diese Denkformen entwickeln zu können - „gesellschaftlich“ bedeutet, daß diese Denkformen gesellschaftlich entwickelt werden, sofern es gesellschaftlich funktional ist, sie zu entwickeln, und dann - wenn sie gesellschaftlich entwickelt wurden - den Menschen zur Aneignung zur Verfügung stehen. Und hier bedeutet wiederum „universell“, daß es Menschen zukommt, sich diese Denkformen aneignen zu können. Man kann sich dies am einfachsten am Beispiel der Sprache verdeutlichen: Gesellschaften, Kulturen, Nationen entwickeln je eine Sprache, und es kommt den Menschen zu, sich Sprache anzueignen - aber jeder Mensch eignet sich genau die Sprache an, die von den Menschen gesprochen wird, unter denen er aufwächst. Bei der Aneignung (während der Ontogenese) kann man wiederum bestimmte „Universalien“ feststellen (am Anfang steht der Einwort-Satz...) - aber auch spezifische Unterschiede. So sagt kein Kind von Anfang an „ich“ - aber in Sprachen, in denen es kein „ich“ gibt, sagt kein Kind bzw. Erwachsener jemals „ich“. Andererseits können auch die Menschen, in deren Muttersprache es kein „ich“ gibt, lernen, in einer anderen Sprache „ich“ zu sagen. Bei den von Piaget untersuchten Begriffen - Identität, Raum, Zeit, Kausalität und als besondern Begriff die Zahl - handelt es sich um gesellschaftliche Begriffe, deren Aneignung Menschen zukommt; beim Aneignungsprozeß muß es sich sowohl um Entwicklungsprobleme als auch um Lernprobleme handeln. Interindividuelle Unterschiede der Herangehensweise an Probleme kommen bezüglich des Aneignungsprozesses noch hinzu. All dies genauer zu untersuchen ist nicht Gegenstand der Erkenntnistheorie, wohl aber der Psychologie.

Der derzeitige Diskussionsstand ist jedoch so: Während also in der psychologischen Literatur die beiden Aussagen „das Kind im Alter von 2-7 Jahren denkt praelogisch“ und „es gibt Kinder, die jünger als 7 Jahre sind, und logisch denken“ nebeneinander stehen (ein Zustand, der für die Psychologie als Wissenschaft typisch ist), scheint innerhalb der Mathematik-Didaktik kein Zweifel zu bestehen. Seit der Erfindung des Klassenraum-Unterrichts (heute würden wir sagen: Frontalunterricht), muß „Didaktik“ sich auf „alle Kinder“ beziehen; seit der Entwicklung des differenzierenden Unterrichts stellt man interindividuelle Unterschiede in Rechnung - aber dennoch sucht man nach der optimalen bzw. maximalen Methode und beläßt es bezüglich der interindividuellen Unterschiede allermeist bei der Zeit. Das Problem damit ist: wenn die optimale bzw. maximale Methode falsch ist (bzw. nur für wenige Menschen geeignet ist), wird es zum gesellschaftlichen Problem, weil die (meisten) Menschen dann bei der Aneignung gesellschaftlicher Denkformen behindert werden. - Deshalb kann es keineswegs unwichtig sein zu untersuchen, wie die „Konstruktion" bzw. Aneignung von gesellschaftlichen Denkformen gelingt bzw. mißlingt bzw. gelingen könnte.

Wie ich in einem Werkstattbericht von 1992 herausgearbeitet habe, sind gerade die Untersuchungen Piagets zum Zahlbegriff als Begründung für neue didaktische Verfahren im Mathematik-Unterricht herangezogen worden - und geben im Grunde auch heute noch die „entwicklungspsychologische" Basis ab, auf die sich die Mathematik-Didaktik gründet. In demselben Aufsatz habe ich die These aufgestellt, daß die Mathematik-Didaktiker Piaget zumindest insofern mißverstanden haben, als Verfahren, die Piaget zur *Prüfung* des Entwicklungsstandes des Zahlbegriffs verwendet hat, zu *Lehr*-Verfahren (der Mathematik!) umgemodelt wurden.

Piagets Ergebnisse sind mit Sicherheit immer wieder replizierbar, auch wir haben Kinder gefunden, die genau so antworteten und argumentierten, wie Piaget es beschreibt. Worum es jedoch geht, ist folgendes: Piaget hat dargestellt, was einige (jüngere) Kinder noch nicht denken können, er hat ihre Fehler dargestellt und analysiert, er hat auch Begründungen gegeben dafür, warum Kinder so denken wie sie es - aus ihren Antworten erschließbar - tun, aber er hat kaum danach gefragt, was sie dennoch schon denken *können* - und wie eben dies „Denken" sie zu Irrtümern verleitet. Deshalb wird zu fragen sein, ob Piagets Annahmen darüber, wie Kinder mathematisch-logisches Denken entwickeln, haltbar sind. Daraus werden auch Hypothesen für den Anfangs-Mathematik-Unterricht ableitbar und begründbar sein.

Es sollen von den zahlreichen experimentellen Anordnungen, die Piaget verwendet hat, vor allem jene ausgewählt werden, die den Kern der „Kardinalzahl" darstellen (unter Verzicht auf die Ordination) - und die gleichzeitig diejenigen sind, auf die man sich in der Fachdiskussion hauptsächlich (oder sogar ausschließlich) bezieht - und die auch die Basis für die Legitimation der modernen Mathematik-Didaktik abgeben. Um sich darüber verständigen zu können, was gemeint ist, müssen diese experimentellen Anordnungen und deren Ergebnisse hier dargestellt werden - obgleich sie vielen Lesern vermutlich sattsam bekannt sind, und die Gefahr besteht, sie in einer bestimmten (persönlichen) Version darzustellen.

I. Was macht Piaget eigentlich - und warum antworten die Kinder wie?

Piaget geht davon aus, daß grundlegend für jede Erkenntnis ist, Invarianzen zu verstehen, und auch „das arithmetische Denken sich keineswegs einer solchen Regel entziehen kann". Diesbezüglich gilt es also, die Invarianz einer Menge zu begreifen, also zu begreifen, daß der „Gesamtwert" einer Menge „unverändert bleibt, gleich welche Veränderungen in den Verhältnissen der Elemente eintreten mögen" (1941, S. 15). Deshalb untersucht er zu Anfang, ob die Invarianz einer Menge eine „Vorform" hat, in der eine Menge „variant" gedacht wird.

Piagets diesbezüglichen experimentellen Anordnungen haben immer folgendes Muster: Zunächst werden mit einer kindlichen Vp zusammen 2 Mengen[2] der Anzahl bzw. dem Volumen nach egalisiert. So wird z.B. in zwei gleiche Gläser gleich viel Wasser gegossen oder es werden in sie jeweils gleichviele Perlen getan, oder 2 Reihen von Gegenständen werden untereinander gelegt, so daß per Stück-zu-Stück-Zuordnung die gleiche Anzahl klar erkennbar ist. Es werden auch Blumen Vasen zugeordnet, Eier Eierbechern, oder es werden Groschen gegen Bonbons getauscht etc. etc. Die Sache kann in eine „Geschichte", also ein konkretes Problem, eingebettet werden (dies Glas gehört Dir, dies Deiner Freundin, und ihr wollt beide gleich viel zu trinken; in jeden Eierbecher soll ein Ei gesteckt werden) oder auch nicht, die Kinder dürfen, wenn sie wollen, die Dinge auch zählen (oder werden sogar dazu aufgefordert), kurz, es kann einiges versucht werden, um mit dem Kind klar zu stellen, daß es sich um zwei „gleiche" Mengen handelt - und es kann auch einiges versucht werden, um zu begründen, warum es sich um gleiche Mengen handeln soll, bzw. warum dies wichtig ist. - Wenn dies erreicht ist, verändert der Versuchsleiter (oder auch die Vp selbst) eine der beiden Mengen insofern, als er den Inhalt eines Glases (Wasser oder Perlen) in ein Glas anderer Form umgießt (oder in mehrere Gläser), oder eine der Reihen auseinanderzieht bzw. zusammenschiebt (bzw. die Blumen aus den Vasen nimmt und auf einen Haufen legt) o.ä. Man kann diese „Variation" (auch mit Piaget) so auf den kürzesten Nenner bringen: die anschauliche Gleichheit wird zerstört - und zwar mit einer Aktivität, die grundsätzlich an der *Anzahl* der Mengen (bzw. am Volumen) nichts ändert. (Es wird also nichts hinzugefügt und nichts weggenommen!) Die Frage an die Vp ist jetzt, ob das noch „gleich viel" ist.

Es zeigt sich, daß es Kinder gibt, und diese sind in der Regel jünger als 7 Jahre, die - wie Piaget es ausdrückt - die Gleichheit nach der ändernden Aktivität nicht mehr zugeben, sondern behaupten, daß eine der beiden Mengen jetzt mehr bzw. weniger geworden ist - auch wenn die Kinder die beiden Mengen zählen können und feststellen, daß sie bei jeder Menge zur gleichen Zahl kommen. Das Denken dieser Kinder, die u.U. auch wörtlich behaupten, daß 10 nicht gleich 10 ist, bezeichnet Piaget als „variant" (bzw. „anschaulich").

---

[2] „Menge" wird hier allermeist im Sinne von „Ansammlung" oder „Anhäufung" gemeint, also als alltagstheoretischer Begriff - nicht im Sinne der mathematischen Menge.

Nun ist es auch logisch gesehen gar nicht anders möglich, als eine ontogenetische Weiterentwicklung in Richtung auf „Invarianz“ anzunehmen. Diese findet Piaget auch bei Kindern, die in der Regel älter als 7 Jahre sind, und sie antworten auf diese Frage „richtig“: die beiden Mengen bleiben „gleich viel“. - Den Übergang von einer Stufe zur anderen konstruiert Piaget folgendermaßen: da es Kinder gibt, die nicht nur einen Aspekt (das Glas ist höher, die Reihe ist länger) thematisieren, sondern beide Aspekte (dies Glas ist zwar höher aber auch schmaler; diese Reihe ist kürzer aber dichter), und da diese Kinder, wenn man insistiert, bezüglich ihres Urteils zu schwanken beginnen, also z.B. sagen: das ist nicht mehr gleich, es ist mehr - ach, es ist ja auch weniger! und da diese Kinder manchmal zum Schluß kommen, daß es dann doch gleich viel sein muß, nimmt Piaget an, daß es die gedankliche „Verrechnung“ zweier Dimensionen ist, die ein Kind von der Varianz zur Invarianz überzugehen ermöglichen. Dies begründet Piaget auch damit, daß die Tatsache, daß die anschauliche Veränderung rückgängig gemacht werden könnte, sozusagen verinnerlicht wird, die Operation wird reversibel - das Denken „operatorisch“ (und ist nicht mehr anschauungsgebunden).

Wie, und vor allem warum, kommt es zu dieser Weiterentwicklung? Warum hat ein Kind zunächst mit dem (für uns offensichtlichen) Widerspruch, daß 10 einmal gleich 10 ist und ein anderes mal nicht, keine Probleme - dann aber doch? Piaget gibt hierfür keine befriedigende Antwort; wenn er überhaupt auf diese Frage eingeht, so nimmt er z.B. an, daß ein Kind, wenn es ständig das gleiche sagte, an sich selbst zu zweifeln beginnt (z.B. 1964, S. 339; hinzuzufügen wäre, daß ein Kind evtl. dann an seiner Antwort zu zweifeln beginnt, wenn ihm eine Frage immer und immer wieder gestellt wird); er betont zwar, daß ohne „physische Erfahrung“ der Widerspruch kaum behoben werden könne, andererseits diese physische Erfahrung nicht ausschlaggebend ist. Piaget beantwortet die Frage nach dem „wie“ damit, daß es sich um eine aktive Konstruktion handle, die Erfahrung mit dem Sachverhalt voraussetzt, und die auf bessere Anpassung an die Realität gerichtet ist - und diese „Ausgerichtetheit“ ersetzt die Antwort nach der Frage „warum?“

Daß die Häufigkeit der Erfahrung keinen Entwicklungsfortschritt bringt, zeigt übrigens Seiler (1968), der Kinder Mengen zig mal hin- und her-gießen, zusammenschieben und auseinanderziehen läßt; antwortet ein Kind „variant“, dann antwortet es sozusagen auch konstant und resistent: jetzt ist es mehr, jetzt wieder gleich viel, jetzt wieder mehr, jetzt wieder gleich viel... Es hat - wie Piaget auch schreibt - mit dem Widerspruch keine Probleme, aber es hat - anders als Piaget doch meint - keinen Grund, dies Urteil zu ändern, jedenfalls so lange nicht, wie es den Widerspruch nicht sieht. Nach Seiler ist die u.U. entscheidende Frage, die zum Umdenken führt, „könnte es nicht auch gleich viel sein?“ (Deshalb ist anzunehmen, daß die Praxis des modernen Mathematikunterrichts, wochenlang zu „üben“, zwei oder mehr auf Arbeitsbögen dargestellte Mengen per Pfeilen einander zuzuordnen um Gleichheit oder Ungleichheit zu ermitteln, letztlich nur langweilt und keinen Fortschritt bringt - es sei denn, die „entscheidende Frage“ würde gestellt.)

Außerdem ist bei diesem von Piaget konzipierten Übergang aber m.E. zwingend mitgedacht, daß die jeweils „beiden“ Dimensionen sichtbar und anschaulich gegeneinander verrechenbar sind. Genau dies ist aber im täglichen Leben kaum der Fall - und dennoch kommen alle Menschen, auch „unbeschulte“, zur Erkenntnis der Mengeninvarianz, wie Piaget sie beschreibt.[3] Wenn man also annähme, daß der Übergang von variantem zu invariantem Denken über die anschaulich mögliche Verrechnung von Dimensionen konstruiert wird, so müßte man weiterhin zeigen, wie von diesem *Spezialfall* (dies Glas ist sichtbar höher, aber auch sichtbar schmaler etc.) zur *Verallgemeinerung* kommt, außerdem wäre eine solche pauschale Verallgemeinerung (wenn eine Reihe zwar kürzer aber dichter als eine andere ist, muß sie gleich viele Elemente enthalten) keineswegs immer richtig. Die genaue Prüfung ist - wenn die „Endzahl“ beim Zählen einem Kind/Menschen nichts sagt, es also keine Schwierigkeiten hat zu behaupten, daß diese 10 Dinger weniger sind als jene 10 Dinger - letztlich nur durch Stück-für-Stück-Korrespondenz möglich. (Vergleichen von Mengen per Stück-für-Stück-Korrespondenz wäre als „didaktische Methode“ in jenem Fall brauchbar, wo ein Mensch den Zahlen als Wörtern keine Bedeutung beimessen kann - aber die Gleicheit bzw. Ungleichheit von 2 anschaulich nicht gleichen Mengen feststellen soll - oder will.) - Piaget erwähnt z.B. 1947 (S. 159), daß Kinder weitere Argumente bringen: wenn man es wieder „zurückmachen“ würde, wäre es wieder gleich viel! und: man hat nichts weggenommen und nichts hinzugefügt! Dies wissen die „varianten“ Kinder auch - aber alle drei Überlegungen (Reversibilität, Komposition und kompensierende Beziehungen) müssen, so Piaget, zusammen kommen, damit „invariant“ gedacht werden kann.

Die Frage wäre allerdings, ob und ggf. in welchen Zusammenhängen Kinder mit dieser Aufgabe Probleme haben, bzw. ob die Stück-für-Stück-Zuordnung ihnen hilft zu kapieren, daß 10 *gleich* 10 „ist“. Üblicherweise wird in der oben erwähnten Literatur gemutmaßt, daß Kinder die Begriffe „mehr“ bzw. „weniger“ nicht verstehen - nicht aber, daß sie den Begriff „gleich“ nicht verstehen! Der Problematik relativer Begriffe geht Piaget (1924) ausführlich nach; hierbei handelt es sich jedoch um den Vergleich von 3 Größen, wobei jüngere Kinder statt diese zu vergleichen (A ist größer als B und B ist größer als C) u.U. sagen: A und B

---

[3] Daß z.B. Bruner, 1971, behauptet, dies sei nicht der Fall, ist m.E. eher ein experimentelles Artefakt. Jene Menschen, denen er keine Mengeninvarianz zu denken zugesteht, betreiben nach seiner Darstellung Handel mit Getreide, was ja voraussetzt, Mengeninvarianz denken zu können.

sind groß, C ist klein. Aber es wäre ja auch möglich, daß jüngere Kinder mit der „Gleichheit“ Probleme haben! Dafür spricht, daß sich bekannterweise ein großer Teil von Kinderstreit auf das Problem bezieht, ob zwei oder mehr Kinder „gleich viel“ Saft, Pudding, Zuwendung etc. haben bzw. erhalten (haben). Diese Art des Streits wird im allgemeinen auf ihre Probleme mit Gerechtigkeit zurückgeführt, also ideologisch gewendet. Möglich wäre aber auch, daß Erwachsene Kindern gegenüber Gerechtigkeit eben mit „Gleich“behandlung bzw. „Gleich“verteilung begründen, und jüngere Kinder dies abstrakte Ziel nicht verifizieren können.

Meine weiteren Überlegungen beziehen sich nun darauf, worin das Problem der Kinder (bezüglich derartiger Probleme bzw. „Aufgaben“) besteht - und wie sie es lösen bzw. wie man ihnen „didaktisch“ dabei helfen kann. *Ausgangspunkt ist: es gibt Kinder, die zumeist jünger als 7 Jahre sind, die unter bestimmten Bedingungen annehmen, daß z.B. 10 nicht gleich 10 oder 4 nicht gleich 4 „ist“ - aber die Einsicht, daß 10 grundsätzlich immer gleich 10 ist, 4 gleich 4 etc., wird von praktisch allen Menschen im Laufe ihres Lebens, in der Regel nach dem 7. Lebensjahr, gewonnen (und zwar unabhängig von Schulunterricht, denn sie ist die Grundlage jeglichen Handels mit „Stücken“ bzw. Mengen in Behältern).*

Sehen wir noch mal genauer zu, worin die Aufgaben von Piaget bestehen, dann wird deutlich: immer werden zu Beginn zwei der Anzahl (oder auch dem Volumen nach) gleiche Mengen hergestellt, die „*Gleichheit*“ ist also sichtbar („anschaulich gegeben“). Piaget selbst berichtet an anderer Stelle (1970, S. 63f), daß „Identität“ von jüngeren Kindern als *totale Identität* gedacht wird oder sogar nur so gedacht werden kann, „Gleichheit“ von ihnen also nicht nur auf *einen* Aspekt, z.B. die Anzahl, bezogen werden kann. Einige von uns[4] befragten Kinder brachten dies sehr schön mit der Formulierung auf den Begriff: die beiden (der Anzahl nach gleichen) Reihen, von denen eine auseinandergezogen oder zusammengeschoben ist, sind „nicht in echt gleich“. Ein (4-jähriges) Kind demonstrierte spontan, was „in echt gleich“ ist, und stellte mit anderen Gegenständen zwei absolut identische Reihen her. Andere behaupteten auch „Ungleichheit“ von 2 Reihen (von z.B. je 8 Groschen), weil „da“ einer war, der glänzt, weil die eine Reihe ein bißchen krumm wäre etc. Wir stellten fest, daß anscheinend schon die Frage, ob zwei Reihen „gleich“ sind, Kinder eher zum Thematisieren von Unterschieden herausforderte (oder sie sich von sich aus darauf konzentrierten). Aus die-

[4] Immer, wenn von „uns“ die Rede ist bzw. sein wird, bezieht sich dies auf studentische Gruppen, die unter meiner Anleitung Kinder befragt haben. Es handelt sich hierbei um Empirische Praktika. Wir haben dabei keinerlei Wert auf statistische Repräsentanz gelegt, sondern vor allem nach Begründungen von Kindern gesucht. Dies entspricht dem methodischen Vorgehen Piagets.

sem Grund hat Piaget vermutlich auch Verfahren gewählt, um Kindern das „Gemeinte“ zu verdeutlichen, z.B. die quantitative Stück-zu-Stück-Korrespondenz.

Im zweiten Schritt des Experiments wird diese anschauliche Gleichheit zerstört, anders ausgedrückt: jemand *„macht“* etwas mit einer der beiden Reihen bzw. Mengen. Piaget selbst hebt zwar nicht an dieser Stelle, wohl aber an anderen (z.B. 1947, S. 155) hervor, daß das größte Hindernis für die Kinder, logisch denken zu können, darin besteht, daß sie ihre Konzentration aufs „Machen“ und den „Erfolg“ des Machens - also das Eintreten einer (intendierten) Veränderung - richten. Es spräche dann alles dafür, daß die Kinder (und dies sind eben die jüngeren) sehen und denken: da „macht“ nun einer was damit - welchen „Erfolg“ möchte er haben? „Erfolg“ ist in der Regel nicht dadurch definiert, daß etwas bleibt, wie es ist, sondern daß sich etwas verändert. Nachdem der Erwachsene etwas „gemacht“ hat, sieht „es“ auch anders aus, die Reihe ist kürzer geworden o.ä., „es“ ist auf jeden Fall *nicht mehr gleich*. (Dies sind genau Antworten, die wir von Kindern bekommen haben.) Läßt man Kindern zur Verbalisierung dieses „anders seins“ nur die Alternativen „mehr“ und „weniger“, entscheidet es sich für eine von beiden - oder sagt, wie eben berichtet: „in echt gleich“ ist es nicht mehr! und läßt sich auf die Frage nach mehr oder weniger nicht ein. Es ist durchaus anzunehmen, daß Piaget, der nach solchen Antworten nicht gesucht hat, diese auch nicht registriert und nicht berichtet hat. Piaget berichtet aber, daß Kinder als Begründung dafür, warum es jetzt mehr oder weniger geworden ist, sagen: weil Du „das gemacht“ hast. (Bruner, 1971, hat ermittelt, daß ca. die Hälfte der befragten Kinder das „machen“ als Grund für die Varianz angeben, weswegen er von „Handlungsmagik“ spricht. Hier wäre auch darauf hinzuweisen, daß kleine Kinder sich über Zauberer kaum wundern: der kann sowas eben „machen“ - und Erwachsene können so vieles „machen“, was es selbst nicht kann, da ist nichts Erstaunliches dabei.)

Anders ausgedrückt: es wäre denkbar, daß die Kinder sozusagen nur „das Machen“ beachten; sie beobachten das Verändern und registrieren die anschaulich sichtbare Veränderung der einen Menge gegenüber der anderen - und verbalisieren dies „anders als“ dann per mehr bzw. weniger (und im Falle des „Zurückmachens“ wieder als gleich).

(Jüngere) Kinder könnten also Probleme mit der „Gleichheit“ von Mengen haben, haben sie diese auch mit der Verschiedenheit von Mengen?

Als Antwort soll auf eine weitere experimentelle Anordnung von Piaget eingegangen werden, die auf die „additive Komposition“ zielt. Hierbei wird den Vpn eine Geschichte erzählt und demonstriert: Ein Kind bekommt von seiner Mutter 4 Bonbons für den Vormittag und vier für den Nachmittag und ißt sie auch termingerecht. Am nächsten Tag bekommt es dasselbe, ißt aber am Vormittag nur 1 Bonbon und am Nachmittag die restlichen 7. Die Frage an die Vpn ist nun, ob das Kind (ggf. es selbst) an beiden Tagen gleich viel Bonbons gegessen hat, wobei die beiden Anordnungen zu 4 und 4 bzw. zu 1 und 7 vor ihm liegen. Es gibt nun Kinder, und es sind wieder die jüngeren, die behaupten, es wären an den beiden Tagen nicht gleich viele Bonbons, und zwar mit der Begründung, daß „diese (7) hier“ mehr sind als „jene (4) dort“ - oder umgekehrt, daß „dies (1) hier“ weniger sei als „die (4) dort“. Offenbar vergleichen diese Kinder nicht die „Tagesrationen“ miteinander, sondern die „Mahlzeiten“, anderes ausgedrückt: nicht die jeweiligen Obermengen, sondern die Untermengen. Arithmetisch ausgedrückt könnte man sagen: sie vergleichen nicht die Summen, sondern die Summanden. Denkbar wäre, daß sie die Summanden mit den Summen verwechseln. Aber (und darauf hebt Piaget *nicht* ab, es ist m.E. doch sehr wichtig): *dabei* machen sie keine Fehler! Jene Kinder[5] also, die sozusagen[6] behaupten (die obigen Ergebnisse mit dazu genommen), daß 10 nicht gleich 10 sei, wissen ganz richtig, daß 7 mehr ist als 4 bzw. 4 mehr ist als 1. Kinder, die mit der *quantitativen Gleichheit* Probleme haben, können also *quantitative Unterschiede* richtig erfassen!

Dem scheint eine dritte von Piaget benutzte experimentelle Anordnung teilweise zu widersprechen. Hier geht es darum zu untersuchen, ob Kindern klar ist, daß „alle“ mehr als „einige“ sind bzw. eine Obermenge immer mehr Elemente enthalten muß als eine ihrer Untermengen. Hier werden den Kindern Holzperlen von verschiedenen Farben vorgelegt, z.B. 8 braune und 2 weiße. Nachdem klar ist, daß alle Perlen, und zwar 10, aus Holz sind, daß 8 von ihnen braun und 2 weiß sind, wird die Vp gefragt, ob die Kette aus den Holzperlen länger würde als die aus den braunen Holzperlen. Es gibt Kinder, und wieder sind es eher die jüngeren, die behaupten, die Kette aus den braunen Holzperlen würde länger als die aus den Holzperlen. Piaget ist diesem Problem sorgfältig nachgegangen, er hat die Kinder die Ketten malen lassen, mit Mengenkringeln umrunden, zählen - er hat auch Fragen gestellt wie „wird ein Strauß aus all diesen Blumen größer als der aus den Glockenblumen“ oder „gibt es in deiner Klasse mehr Kinder oder mehr Mädchen“ (wobei der Vorlage bzw. der Realität entsprechend immer die Obermenge mit der jeweils größeren Untermenge verglichen werden soll!); diese deutlicheren Fragen trugen nicht zur richtigen Lösung des Problems bei.

Es gibt also Kinder, die behaupten, die Gesamtmenge sei kleiner als eine ihrer Teilmengen. Warum tun sie dies? Piaget führt - z.T. gestützt

---

[5] Da Piaget unterschiedliche Kinder befragte, wissen wir nicht, ob es wirklich „jene“ Kinder waren. Deshalb wäre korrekter zu sagen: Kinder unter 7 Jahren, die behaupten, daß ...

[6] „Sozusagen“ soll bedeuten, daß die Kinder sich ja nicht auf Zählergebnisse, sondern auf Mengen beziehen. Sie sagen also z.B.: in der unteren Reihe sind mehr als in der oberen.

auf die kindlichen Begründungen - folgendes an: die Kinder denken (wie oben angeführt) im „Machen“, und wenn man aus den braunen Holzperlen eine Kette gemacht hat, sind die „weg“, für die zweite Kette (und implizit werden ja zwei Ketten verlangt) bleiben dann nur noch wenige(r) übrig (ausdrücklich in 1947, S. 151). Es kann - so Piaget - (noch) nicht „im Geist“ zuerst aus einer Menge eine Kette machen, dann aus derselben eine zweite, und diese vorgestellten Ketten miteinander vergleichen. Piaget hat - um diese Schwierigkeit zu umgehen - auch 2 Perlensätze zur Verfügung gestellt, wie er schreibt, ohne nennenswerten Erfolg (1941, S. 221f, 234).

Hervorzuheben ist hier m.E. aber, daß Kinder, die - arithmetisch ausgedrückt - zwar „eigentlich“ sagen, 8 ist mehr als 10, dann aber, wenn sie sich wirklich vergleichend auf die Untermengen beziehen, wiederum korrekt antworten; es gibt kein Kind, das behaupten würde, die Untermenge mit 2 Elementen wäre größer als die Untermenge mit 8 Elementen. Verfolgt man Piagets Begründung gedanklich weiter, so wäre durchaus denkbar, daß die Kinder - arithmetisch gesprochen - subtrahieren: indem sie die Holzperlen in braune und weiße „zerlegen“, nehmen sie die braunen „weg“ und ermitteln, daß ihnen nur wenige übrig bleiben, also 10 weg 8 ist 2, und 8 ist mehr als 2 (auch wenn es um 16 grüne und 18 blaue geht, sie machen diesbezüglich nie einen Fehler!). Und wiederum gerät ihnen Obermenge und Teilmenge durcheinander (allerdings bei einer Subtraktion).

II. Womit haben Kinder Probleme - und was können sie?
Unsere Untersuchung

Unsere Untersuchungen beziehen sich auf drei „empirische Praktika“ (vgl. Fn 4), in denen jeweils ca. 30 Studierende je ein oder zwei Kinder (das jüngste war 3.5 Jahre alt, die ältesten schon 8 Jahre alt) befragten[7]. Im ersten empirischen Praktikum experimentierten wir mit verschiedenen Fragen und Anordnungen und konzentrierten uns hauptsächlich auf die Redeweise und Begründungen von Kindern. Im zweiten wurden 21 Kinder bezüglich der Invarianz und der Mengeninklusion befragt, im

[7] Die Auswahl der Kinder erfolgte nur nach dem Kriterium, daß der jeweilige Studierende das von ihm befragte Kind kannte. Einige befragten auch ihre eigenen Kinder. Es handelt sich also keineswegs um eine für irgendetwas repräsentative Stichprobe und mit Sicherheit wurden überwiegend Kinder befragt, deren Eltern der (oberen) Mittelschicht angehören. Da aber ungefähr die Hälfte der befragten Kinder durchaus in der von Piaget beschriebenen Weise antworteten, also nicht alle per vermuteter elterlicher „Förderung“ fortgeschrittener bez. des Zahlbegriffs waren, ist dies unwichtig. - Andererseits zeichnen sich unsere Untersuchungen dadurch aus, daß wir die verschiedenen Aufgaben wirklich ein und demselben Kind stellten und insofern nicht nur - wie Piaget - gemäß Alter parallelisieren mußten. Die Bedeutung wird gleich klar werden.

dritten wurden insgesamt 45 Kinder ebenso, zusätzlich aber auch bezüglich der „additiven Komposition“ befragt. In beiden „Durchgängen“ antwortete knapp die Hälfte aller Kinder auf alle Fragen richtig, von diesen war das jüngste Kind 4 bzw. 3;5. Jahre alt. Von denen, die mindestens eine Frage falsch beantworteten, war das älteste 8;8 Jahre alt. Es zeigt sich auch deutlich, daß die Fragen unterschiedlich „schwer“ sind: Von den 45 (in der dritten Untersuchung) befragten Kindern antworteten 39 invariant (also richtig), 34 beherrschten die Mengeninklusion, 29 beherrschten die additive Komposition - daß nur 20 Kinder alle Fragen richtig beanworteten, kann bedeuten, daß die Aufgaben nicht „kognitiv strukturgleich“ sind, es kann aber auch an Ungeschicklichkeiten bei der Befragung liegen.

Die richtige Antwort gaben Kinder übrigens oft erst dann, wenn sie zum Zählen aufgefordert wurden (was nach Piaget, 1941, keinerlei Sinn hat) und sie begründeten ihre Korrektur auch mit dem Zählergebnis. Wir fanden - in der Voruntersuchung - allerdings auch ein Kind, das nach dem Zählen fragte: wieso sind in beiden Reihen 8 - und dennoch sind da (in der auseinandergezogenen Reihe) mehr? wie kommt das? Es war eben jenes Kind, das bestritt, die Reihen wären „in echt gleich“ und außerdem mit anderem Material demonstrierte, was „in echt“ gleich ist. Dieses eine Kind würde - erkenntnistheoretisch - genügen, um zu zeigen, daß Zählen nicht zur Invarianz führt. Aber eben dieses Kind legte auch sein Problem mit der Identität offen: entweder total gleich - oder gar nicht.

Jenen Kinder, die auf eine der Piaget-Aufgaben falsch geanwortet hatten, sollten die im folgenden dargestellten alternativen Aufgaben gestellt werden, wenn diese richtig beantwortet wurden, sollten die Piaget-Aufgaben noch einmal gestellt werden. Die „klinische Methode“, die wir wie Piaget anwendeten, setzt voraus, daß Kinder nicht nur freiwillig, sondern auch interessiert mitmachen, da lustlos gegebene Antworten wertlos sind (vgl. Piaget 1926, S. 23 ff). Dies bedeutet auch, daß die jeweiligen Intervies oft vorzeitig von den Kindern abgebrochen wurden.

Bezüglich des *Invarianzproblems* haben wir experimentelle Anordnungen gewählt, die die für quantitative Fragen erschwerenden Probleme nicht enthalten. Wir wollten prüfen, ob jene Kinder, die die von Piaget dargestellten „Fehler“ (der „Varianz“) machen, u.U. damit Probleme haben, *zwei* Mengen zu vergleichen, während ihnen die Identität einer Menge kein Problem wäre. Wir wollten weiterhin prüfen, ob sie deshalb nach dem „*Anschaulichen*“ urteilen, weil sie um Wahrnehmungstäuschungen nicht wissen[8]. Und wir wollten prüfen, ob sie tatsächlich

[8] Ein vier-jähriger Junge, vor dessen Augen Cola von einem Glas in eine längliche Vase umgegossen wurde, geriet in Verzückung und wollte - trotz aller Erklärungen - dies Zauberinstrument unbedingt geschenkt bekommen...

„wissen", welches die (einzigen) für Vermehrung bzw. Verminderung adäquaten „Aktivitäten" sind.

Wir haben deshalb *den* Kindern, die gemäß der Aufgaben von Piaget „variant" dachten, folgende beiden abgewandelten Aufgaben gestellt:

Bei der ersten haben wir die *Anschauung* insgesamt (und so übrigens auch die bekannte Wahrnehmungstäuschung beim Umgießen von Flüssigkeiten bzw. beim Umschütten von Gegenständen in Behältern) *ausgeschlossen* und außerdem den *Vergleich suspendiert*. In einem Sparstrumpf ist Geld, das Kind kann hineinsehen und sich davon überzeugen. Dann wird im Rahmen einer Geschichte (die Oma kommt und steckt noch was rein, dann kommt der Opa und nimmt sich was raus o.ä.) Geld dazu getan bzw. Geld weggenommen. Die Kinder wurden nach jeder dieser Aktivitäten gefragt: Ist das jetzt immer noch gleich viel, oder mehr oder weniger? *Alle* so befragten Kinder, auch die allerjüngsten (von ca. 3 Jahren) antworteten völlig richtig, daß im ersten Fall nun mehr Geld im Strumpf ist, im zweiten Fall weniger als vorher. Bezüglich anderer Aktivitäten, wie kneten und schütteln des Strumpfes, sagten zwar zwei Kinder, jetzt wäre es da „gedrängter", aber allen andern war klar: jetzt ist es immer noch gleich viel. Dies zeigt doch ganz eindeutig, daß sie begriffen haben, welchen „Erfolg"[9] dazutun bzw. wegnehmen hat.

Bei der zweiten Aufgabe haben wir die Anschauung zwar nicht eliminiert, den Vergleich aber zunächst ausgeschlossen. Auf einem großen rechteckigen Papier werden oben 5 Pfennige ausgelegt. *Aus* dieser Reihe werden dann 2 herausgenommen, und zwar so, daß die Ausdehnung der Reihe gleich blieb. *Alle* Kinder sagten, daß es jetzt weniger sind. Dann werden an der unteren Kante wieder 5 Pfennige ausgelegt und *in* diese Reihe 2 Pfennige eingefügt, wobei wiederum die Ausdehnung der Reihe gleich blieb. Wieder sagten *alle* Kinder, daß es jetzt „mehr" Pfennige sind. Obwohl also die jeweilige Reihen „gleich lang" blieb, „wußten" alle Kinder, daß Hinzufügen zu „mehr" und Wegnehmen zu „weniger" führt. Wir haben dann die beiden Reihen (die oben und unten auf dem rechteckigen Papier lagen, um optische Verzerrungen auszuschließen) miteinander vergleichen lassen, und *alle* Kinder antworteten völlig richtig: in „der da" sind mehr als in „der da"[10]. Es wurde mit den Kindern

---

[9] Sprachlich besser wäre hier von „Effekt" zu sprechen. In den deutschen Übersetzungen von Piagets Texten kennzeichnet jedoch „Erfolg" das Resultat des „Machens" - anders: man macht etwas, um etwas bestimmtes zu bewirken, und das Resultat ist dann „Erfolg" - oder Mißerfolg.

[10] Bis auf eine Ausnahme: ein 4-jähriges Kind antwortet sozusagen „falsch" herum, aber es war anscheinend aus unbekanntem Grunde total verwirrt, nahm auch, als man ihm sagte, es könne eine der beiden Reihen behalten, die „wenigeren". Nach Piaget hätte es aber, da beide Reihen gleich lang waren, beide Reihen für „gleich viel" halten müssen. Möglicherweise hatte es einfach schlechte Erfahrun-

auch darüber diskutiert, warum das so ist. Ihre Argumente waren eindeutig: man hat „dort“ etwas weggenommen - und „da“ was dazugetan.

Anschließend wurde ihnen, soweit möglich, noch einmal jene Piaget-Aufgabe gestellt,wo eine von zwei egalisierten Reihen von Spielsteinen auseinandergezogen wurde, und zwei drittel der Kinder antworteten jetzt richtig. Eventuell wurde ihnen doch klar, daß *hier* nichts weggenommen und nichts hinzugefügt wurde, sie also zu der Begründung kamen, die Piaget von „invarianten“ Kindern berichtet: „*das* (was du da *gemacht* hast) verändert *nichts* (an der Menge)“. Also sind die beiden Mengen „gleich viel“. Solange ein Kind im „vermehren“ bzw. „vermindern“ denkt, also das „Machen“ zentriert, sich dabei aber schon im Klaren darüber ist, daß bestimmtes Machen zu einem bestimmten „Erfolg“ führt, schätzt es auch den „Erfolg“ richtig ein - und erkennt den „Mißerfolg“ (seines Denkens). Man könnte dies so verbalisieren: „ich dachte, der macht was, um es zu verändern - aber <u>dies</u> Machen verändert an <u>dem</u> nichts; es sieht zwar wie mehr aus, ist es aber nicht geworden - so laß ich mich nicht reinlegen“. Das restliche Drittel der Kinder schaffte den „Sprung“ nicht; wir haben leider von ihnen keine interpretierbaren Begründungen bekommen. Denkbar wäre allerdings, daß sie zwar wissen, was vermehren und vermindern bewirkt, aber noch nicht ganz klar war, daß dazutun und wegnehmen die einzigen Verfahren sind, die zu mehr bzw. weniger führen.

Mit folgender experimentellen Anordnung wollten wir herausfinden, ob jene Kinder, die die *Mengeninklusion* gemäß der Piagetschen Aufgaben nicht beherrschen, Untermengen richtig zu Obermengen *zusammensetzen* können.

Jenen Kindern, die die Aufgabe zur Mengeninklusion (sind alle mehr als einige?) gemäß Piaget *falsch* beantworteten, haben wir *zwei* Haufen von Spielsteinen vorgelegt, von der jeder 8 in einer Farbe und 2 in einer anderen hatte, also jene Anordnung gewählt, von der Piaget schreibt, sie brächte keine nennenswerten Fortschritte bezüglich der Mengeninklusion. Wir haben die Kinder gefragt: wenn du aus allen deinen (10) Steinen einen Turm bauen würdest - und ich nur die aus den (8) roten, welcher Turm würde dann höher?[11] Wiederum antwortenen *alle* so befragten Kinder (auch 3-jährige), daß ihr Turm höher würde - und zwar mit der Begründung, daß dann „bei mir“ ja „die da“ bzw. „die beiden“ noch „dazu kämen“.

Diese Begründung ist bemerkenswert! Dasselbe Kind, das bei der Aufgabe, aus *einer* Menge zwei Türme zu machen, Ober- und Unter-

---

gen mit Erwachsenen-Tricks, so daß es diese „leichte“ Aufgabe als „schwer“ klassifizierte...

[11] Einigen Kindern wurde die Frage auch „umgekehrt“ gestellt, so daß ihr Turm der kleinere war, dies führte nicht zu falschen Ergebnissen - es ging ihnen also nicht etwa darum, der „Gewinner“ zu sein o.ä.

mengen verwechselt (wie Piaget annimmt) bzw. die Untermengen miteinander vergleicht (unsere Hypothese[12]), tut dies nicht, wenn es die Möglichkeit hat, aus zwei Mengen jeweils zwei Türme zu machen. Anders ausgedrückt: ein Kind, das eben noch behauptet, daß - in Zahlen ausgedrückt - 8>10 ist, sagt jetzt, daß sozusagen „dies *und* jenes zusammen“ unbedingt mehr sein muß als „dies“ - weil „jenes“ noch „dazu kommt“.[13]

Wieder auf *eine* Menge orientiert (also gefragt, ob der Turm aus allen diesen (10) Steinen höher würde als der aus jenen (8) roten), antworteten fast alle Kinder jetzt richtig - zwei schafften sozusagen den Sprung nicht. Aber die Begründungen derer, die ihn „schafften“, sind interessant. Frage: Gibt es mehr Tiere oder mehr Hunde? Antwort: Mehr Hunde - ach, ich dachte, weil die meisten Leute Hunde haben, aber bei den Tieren kommen zu den Hunden ja die anderen Tiere noch dazu![14] Aber es gab auch Kinder, die jetzt entschieden antworteten: alle sind mehr!, also nicht mehr auf die Zusammensetzung rekurrierten.

Die oben genauer ausgeführte Erklärung wäre, daß ein Kind, das „falsch“ antwortet, im ersten Fall von der Obermenge die Untermenge „wegnimmt“, also subtrahiert - und dann, statt Minuend und Subtrahend zu vergleichen, den Subtrahenden mit der Differenz vergleicht. (Würden jüngere Kinder „wahllos“ antworten, müßte dem Zufall entsprechend die Hälfte der Kinder sagen, die Untermenge wäre kleiner als die Obermenge, aber genau dies geschieht eben nicht.) Im zweiten Fall (zwei Türme) aber kommt es zur richtigen Lösung - indem es addiert.

Jenen Kindern, die die Aufgabe zur *additiven Komposition* nach Piaget *falsch* beantwortet hatten, erzählten und demonstrierten wir die Geschichte mit den Bonbons in folgender Form: Ein Kind bekommt von seiner Mutter vier Bonbons und seine Oma gibt ihm noch 4 dazu. Ein anderes Kind bekommt von seiner Mutter ein Bonbon, und dessen Oma gibt ihm noch 7 dazu. Haben die beiden Kinder gleich viele Bonbons? 4

---

[12] Dies gilt u.E. auch dann, wenn ein Kind auf die Frage, ob hier auf dem Blatt mehr Kinder (8) oder mehr Mädchen (6) wären, sagt: es sind mehr Mädchen als Kinder, denn als Begründung wird immer angegeben: dann bleiben ja nur noch die beiden da übrig.

[13] Diese Begründung ist auch deshalb interessant, weil jene Kinder, die die entsprechende „Piaget-Aufgabe“ richtig beantworteten, ungefähr zur Hälfte ebenso „additiv“ antworteten, während die andere Hälfte wußte „alle sind mehr als einige“, und zwar in allen Altersstufen. Auch dies spricht für die weiter unten vertretene These, daß das Zusammenzählen, also die Addition, den Übergang zur Mengeninklusion markiert.

[14] Derartige Berichtigungen beschreibt Piaget auch, im Rahmen des „Übergangs“, aber er hebt nicht hervor, daß die Kinder hier - gedanklich - „dazu tun“.

Kinder antworteten wieder falsch[15], aber 7 Kinder, die in der Piaget-Aufgabe eindeutig falsch geantwortet hatten, beantworteten diese Frage eindeutig richtig, 6 dort „schwankende“ Kinder kamen hier zur klaren richtigen Antwort (und von diesen antworteten nur zwei auf die anschließend noch einmal gestellte Piaget-Aufgabe wiederum falsch, die anderen antworten nun richtig).

Der Unterschied zwischen unsere Fragestellung und der von Piaget ist kein „mathematischer“, denn mathematisch gesehen geht es immer darum, die Gleichheit von 8 und 8 zu erkennen. Indem wir hier aber per Geschichte zwei verschiedene Kinder und zwei Geber einführten, ging es offensichtlich um ein ganz anderes „konkretes“ Problem: haben die beiden Kinder gleich viel bekommen? Genau dies ist die Frage in Kinderstreits ... Interessanter ist jedoch, daß unsere Frage (evtl. im Zusammenhang mit dem eher „emotionalen“ Problem) eine Addition nahelegte! Um zu ermitteln, ob beide Kinder „gleich viel“ haben, liegt es nahe, die beiden *Untermengen zusammenzuzählen* und die *Summen* miteinander zu *vergleichen*.

Daß Zusammenzählen, also die Addition, der Weg ist, auf dem die Kinder zur Mengeninklusion kommen, kann auch aus intraindividuellen Vergleichen gefolgert werden. Es gab (acht) Kinder, die zwar behaupteten, daß 4 und 4 (an einem Tag) mehr bzw. weniger als 7 und 1 (am anderen Tag) sei, die aber richtig argumentierten, daß die roten und die weißen Steine *zusammen* mehr als die roten sein müßten.

III. Schlußfolgerungen für die Mathematik-Didaktik

Als Ergebnis unserer Untersuchungen kann zusammenfassend festgehalten werden:

1. Es gibt Kinder (in unseren Untersuchungen ab 3;5 Jahren), die die angeführten Piagetschen Aufgaben richtig lösen, also über einen entwikkelten Zahlbegriff verfügen.
2. Es gibt Kinder (in unseren Untersuchungen bis zu ca. 6 Jahren), die „variant“ urteilen - und es gibt Kinder (in unseren Untersuchungen bis zu 8 Jahren), die zwar schon „invariant“ urteilen, die Mengeninklusion und/oder die additive Komposition jedoch nicht begriffen haben.
3. Die Kinder, die „variant“ urteilten, also die *Gleichheit* von zwei quantitativ gleichen Mengen, die unterschiedlich aussehend gemacht wurden, noch *nicht* richtig beurteilten, wußten sehr wohl, welche von zwei quantitativ *unterschiedlichen* Mengen *größer* (bzw. kleiner) ist. Die „Ausdehnung“ spielte hierbei keine Rolle!

---

[15] Sie waren 4;7, 4;9, 5;4 und 7;8 Jahre alt. Cor (7;8) kommt aber, als ihr die Piaget-Aufgabe am Schluß noch mal gestellt wird, und ihr verdeutlicht wird, daß es um die Tagesrationen geht, zu dem Schluß, daß es „zusammen“ jeweils 8, also gleich viele Bonbons sind.

4. Die Aktivität des Vermehrens und Verminderns samt deren Ergebnis (es wird dann mehr bzw. weniger) war *allen* Kindern klar, auch denen, die variant urteilten.
5. Kinder, die Obermenge und deren größere Untermenge nicht richtig vergleichen konnten, können zwei Mengen richtig vergleichen, sowohl was Gleichheit als auch was Verschiedenheit betrifft (dies entspricht dem 3. Ergebnis), und sie begründeten dies bezüglich der Untermengen additiv („zusammen“ ist das dann gleich bzw. da kommt noch was dazu, deshalb ist das mehr).
6. Es gibt Kinder, die falsch urteilten, sich aber spontan korrigierten, wenn sie zum Zählen aufgefordert wurden.

Anders ausgedrückt: es spricht alles dafür, daß bewußtes Zählen zum richtigen Urteil bez. des Vergleichs von Quantitäten führt. Es spricht *weiterhin* alles dafür, daß die Einsicht in das Verhältnis von Obermenge und Untermenge(n) über das *Zusammensetzen* von Untermengen zur Obermenge geschieht. Dies entspricht einer „natürlichen“ arithmetischen Addition, bzw. noch einfacher ausgedrückt: dem Zählen und Zusammenzählen, was „das Ergebnis“ liefert. - Piaget führte wie oben gesagt aus, daß die Kinder, die in den geschilderten Prüfungen zeigten, daß sie über keinen entwickelten Zahlbegriff verfügen, u.U. durchaus um die einzelnen Aspekte wissen (ursprüngliche Identität, sowie daß nur dazutun und wegnehmen etwas an der Quantität ändert, Reversibilität, Verrechenbarkeit von Dimensionen), daß es aber darauf ankäme, dies Wissen zu koordinieren (1947, S. 159). Wie bzw. warum kommt es zu dieser Koordination? Unsere Ergebnisse sprechen dafür, daß sie über die Aktivität des Zählens bzw. *Zusammenfügens* (und ggf. Zusammenzählens) erfolgt.

Unsere Ergebnisse zeigen, daß das „Machen“ für die Urteile der Kinder sehr bestimmend ist, worauf auch Piaget hinwies; ein entwickelter Zahlbegriff muß - auch nach Piaget - vom „Machen“ jedoch gerade absehen, aber erst, nachdem es richtig „gemacht“ werden kann. Darauf verweist Piaget eigentlich, wenn er betont, daß im Ausdruck 1+1=2 das „+“ genetisch gesehen nicht eine Beziehung zwischen zwei Einheiten ist, sondern eine Operation (1947, 23f) und daß die ganze Zahl nur als Element einer Zahlenreihe, die durch die Operation +1 entsteht, ist (1947, 42) - und daß jede Operation zunächst eine Tätigkeit im eigentlichen Sinne ist. Dies entspricht unseren Ergebnissen. Das damit Gemeinte soll noch einmal verdeutlicht werden:

Die von uns gewählte Anordnung könnte in ihrer Gesamtheit als „Lernexperiment“ beschrieben werden. Die Piaget-Aufgaben dienten als pre-test, „unsere“ Aufgaben könnten eine Art Lernphase gewesen sein, als post-test wurden die Piaget-Aufgaben wiederholt. Wären die Aufgaben strukturgleich, könnte man sagen, daß die Kinder durch Wiederholung eben zunehmend zu richtigen Ergebnissen kommen. Daß aber bei „unseren“ Aufgaben keine Fehler gemacht wurden, spricht dafür, daß sie dem kindlichen Denken entsprachen. Es ist auch nicht anzunehmen, daß die Lösung von u.U. nur einer einzigen Aufgabe einen Lerneffekt im Sinne des Übens brächte. Wesentlich ist aber: unsere Aufgaben stellten Vermehren und Vermindern sowie deren Ergebnisse in den Vordergrund! Wenn die Kinder dann auf die Piaget-Aufgaben richtig antworteten, könnte dies darauf zurückgeführt werden, daß sie „begriffen" hatten: wenn *nichts dazu* kommt und *nichts weg*genommen wird, so ändert alles, was man macht, *nichts* an der Anzahl, sie bleibt also gleich (bzw. zwei Quantitäten bleiben gleich); der Turm aus allen Steinen muß höher sein als der aus den roten Steinen, da bei allen ja die weißen noch *dazu* kommen; die Anzahl der beiden Bonbon-Mengen ist gleich, weil die jeweiligen Mahlzeiten *zusammengesetzt* die gleiche Gesamtmenge ergeben. Ganz allgemein: es wurde ihnen klar(er), welches „Machen" am quantitativen Aspekt etwas ändert, und welches nicht, bzw. welches „Ergebnis" gefragt ist. Dies ist sehr deutlich am „Turmbau" zu zeigen. Sollen Kinder die Frage beantworten, ob ein Turm aus all diesen oder aus nur den roten Steinen höher wird, „machen" sie (u.U. in Gedanken) einen roten Turm und vergleichen diesen mit dem dann aus den übrigen zu bauenden, sie antworten also im Sinne einer „natürlichen" Subtraktion. Nachdem sie aber im Sinne einer „natürlichen" Addition sich verdeutlicht haben, daß der, wo noch Steine *dazu* kommen, höher sein muß als der andere, können sie diese Addition auch bezüglich *eines* Turms ausführen.

Dies alles widerspricht Piagets Überlegungen nicht, erweitert sie jedoch. Wenn Piaget schreibt, „das arithmetische Denken" kann sich „keineswegs einer solchen Regel entziehen", d.h. dem Invarianz-Prinzip (1941, S. 15), wäre dem hinzuzufügen, daß das Invarianz-Prinzip offenbar durch das arithmetische Denken konstruiert wird. Inwiefern soll das aber besonders wichtig sein?

In einem Werkstattbericht (1992) bin ich der Geschichte der Mathematik-Didaktik genauer nachgegangen. Ich habe herausgearbeitet, daß die heutigen Methoden ihre Wurzel in gestaltpsychologischen Überlegungen haben, die mit Piagets Untersuchungsergebnissen „verbessert" wurden, wozu dann in den 60er Jahren die mengentheoretische Orientierung kam.[16] Sinn dieser letzten (inzwischen als „abgeschafft" geltenden) Reform war, den Rechenunterricht durch einen Mathematikunterricht als „Denkerziehung" (vgl. z.B. Steiner 1973) zu ersetzen. Mathematik als Denkerziehung bedeutet, den Begriff, also hier den Zahlbegriff, im Sinne einer logischen Klasse zu „lehren" - und aus ihm die arithmetischen Operationen zu entwickeln. Auch gegenwärtig wird behauptet, ein invarianter Zahlbegriff wäre die *Voraussetzung* für „den

[16] In diesem Zusammenhang wurden die „logischen Blöcke" als das Material der Wahl für Vorschulkinder erfunden und empfohlen - die die heutigen Kinder wohl kaum mehr kennen.

Umgang mit Mengen und Zahlen“ (vgl. Schmitz, 1993). Dies bedeutet entweder - laut Schmitz - abzuwarten bis „es klick macht“ bzw. mit provozierter Korrespondenz an korrespondierenden Mengen zu beginnen. Für andere (s. Ulmann 1992) bedeutet es, zunächst den Begriff der Gleichheit im Zusammenhang mit relativen Begriffen (leichter - schwerer, größer - kleiner, dann: mehr - weniger) zu lehren, und es bedeutet sodann, die Addition im Sinne der Mengeninklusion (Obermengen in Untermengen zu zerlegen) zu vermitteln. In jedem Fall geht es um das Vergleichen von Mengen.

Die „Aktivität“, mit deren Hilfe Kinder den Begriff der Gleichheit bzw. Verschiedenheit erwerben sollen, ist das Malen von Pfeilen (von Kindern zu Wippenplätzen, von Vater-Mutter-Kind zu einer Schulade mit drei Punkten etc.) bezüglich korrespondierender oder nicht korrespondierender Mengen - *nicht aber das Vermehren und Vermindern* bzw. *„weder noch zu tun*“ (also z.B. Spielsteine zusammenzuschieben oder auseinanderzuziehen); dies wäre nach unseren Überlegungen wichtig zu begreifen und entspricht Piaget: es gibt Aktivitäten, die bezüglich der Quantität *Nulloperationen* sind.

Die Aktivität, mit der dann die Addition (also Vermehren) „gelernt“ werden soll, ist das Zerlegen von Obermenge in Untermengen per Einkreisen bzw. Striche-Ziehen, nicht das Zusammensetzten von Untermengen zu einer Obermenge. Wie ich in jenem Werkstattbericht genauestens herausgearbeitet habe, ähneln die „Arbeitsbögen“ in verblüffender Weise den Piagetschen Prüfungsaufgaben, mit der ca. die Hälfte der von uns befragten Kinder auch im Schulalter noch Probleme haben - und die, wie unsere Untersuchungen ergeben haben, weder den kindlichen Theorien entsprechen, noch sie zur Aneignung der Mengeninklusion bzw. der additiven Komposition führen. Da auch schon 3-jährige Kinder nach unseren Untersuchungen mit dem Vergleichen unterschiedlicher Mengen keine Probleme haben, dürfte das Pfeile-Malen sie langweilen - und dennoch hätten sie evtl. sie verwirrende Probleme mit dem „gleich“ - „in echt gleich? oder gerecht? oder was?“. Das Zerlegen einer Menge in Untermengen, was dann als „Plussatz“ gesprochen werden soll, dürfte zu weiterer Irritation beitragen.

Es soll hier deutlich herausgehoben werden, daß jene Kinder, die bei der Einschulung über einen entwickelten Zahlbegriff verfügen, vermutlich keine Probleme mit dem derzeitigen Mathematikunterricht haben! Aber der „Theorie“ der anderen Kinder, und es war eine gering überwiegende Mehrheit in unseren Untersuchungen wahrscheinlich intellektuell geförderten Kinder, läuft diese didaktische Methode absolut zuwider. Unsere Untersuchungen zeigen deutlich, daß es Kinder bis zu 8 Jahren gibt[17], denen „Zerlegen“ nur als Subtraktion erscheinen kann und sie auf den Minuenden und die Differenz orientiert - während sie

[17] Diese Kinder besuchten die 2. oder 3. Klasse normaler Grundschulen!

mit dem „Zusammensetzen“ von Summanden zu einer Summe in ihrer Theorie keine Probleme haben, ebensowenig wie mit dem Abziehen eines Minuenden, um die Differenz zu ermitteln. *Die verändernde Aktivität und das Ermitteln des Resultats dominiert in ihrem Denken.* Der Sinn einer mathematischen Gleichung, der entsprechend eben von der Aktivität in der Zeit abgesehen wird, und in der es kein „Ergebnis“ gibt, ergibt sich erst als Abstraktion von den konkreten Operationen; im übrigen werden mathematische Gleichungen laut Lehrplan erst in der 7. Klasse explizit gelehrt.

Wenn ich aufgrund unserer Untersuchungsergebnisse dafür plaidiere, im Mathematikunterricht statt des Zahlbegriffs (wie Piaget ihn definiert) wieder Zählen und Rechnen an den Anfang zu stellen, so ist dies kein Plädoyer für die Wiedereinführung des verpönten „alten Rechenunterrichts“. Es geht nicht darum, mechanisch rechnen zu lernen, sondern das Prinzip der Arithmetik verständig zu nutzen, um Mathematik verstehen zu können. Im Rückgriff auf die Einführung: Jene Kinder, die im Einschulungsalter nicht über einen entwickelten Zahlbegriff im Sinne Piagets verfügen, sind, wenn dieser vorausgesetzt wird, von Anfang an die Verlierer und gelten dann - vereigenschaftet - als mathematisch „unbegabt“.

Literatur:

Bruner, J. S. u.a. (1971) Studien zur kognitiven Entwicklung. Stuttgart.

Piaget, J.:

1924 (1972) Urteil und Denkprozeß des Kindes, Düsseldorf

1926 (1988) Das Weltbild des Kindes. München

1941 (1975) mit A. Szeminska: Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Stuttgart.

1947 (1971) Psychologie der Intelligenz. Olten.

1964 (1972) Genese und Struktur in der Psychologie der Intelligenz. In: Theorien und Methoden der modernen Erziehung. Wien-München-Zürich.

1970 (1973) Einführung in die genetische Erkenntnistheorie. Frankfurt/M.

Schmitz, G. (1993) Lernvoraussetzungen in den Eingangsklassen. In: die Grundschule H. 6, S. 23-25

Seiler, B. Th. (1968) Die Reversibilität in der Entwicklung des Denkens. Stuttgart.

Steiner, G. (1973) Mathematik als Denkerziehung. Stuttgart

Ulmann, G. (1992) Mathematik-Didaktik und psychologische Theorien. In: Forum Kritische Psychologie 30, S. 113-146, Berlin/Hamburg