Thilo Busse

Mathematik ist eine süße Frucht...

1. Einleitung

Mathematik ist eine süße Frucht ...
... ich nehme an, dass viele Mathematiker darin übereinstimmen. Allen anderen, die z.T. auf Grund leidvoller Erfahrungen mit der Mathematik in Schule und Universität daran zweifeln, möchte ich zu bedenken geben, dass wir die heutige Mathematik nicht hätten, wenn sie nicht immer wieder von Menschen um ihrer selbst willen betrieben worden wäre.

Mathematische Aussagen haben eine ganz besondere Qualität: Sie werden vernünftigerweise nicht bezweifelt. Wer, zumal als Schüler, eine mathematische Aussage nicht versteht, hat sich das meist selbst zuzuschreiben. Mathematische Aussagen sind universell und überzeitlich gültig. Daher scheint das Lernen von Mathematik nur Anpassung zuzulassen und keinen Raum für individuelle Wege zu haben, es sei denn für wenige speziell Begabte, die Mathematik betreiben können.

Doch Mathematik zu betreiben ist nicht auf mathematische Institute und Fachmathematiker beschränkt. Jean Lave (1988) hat beobachtet, dass arithmetische Verfahren von Kindern selbständig entwickelt werden. Es gibt eine Straßen-Mathematik, ein kontext-bezogenes, ursprüngliches Sich-Beschäftigen mit quantitativen und logischen Zusammenhängen vor und neben der wissenschaftlichen Mathematik. Außerdem erweisen sich mathematische Rätsel, Denkaufgaben, Spielereien, scheinbare Absurditäten u.ä. als vergnügliche Freizeitbeschäftigung für viele Menschen, die sich vielleicht scheuen würden, ein schulmäßiges mathematisches Problem zu lösen. Diese Beispiele zeigen eine Mathematik, die begreifbar und nützlich ist, die Spaß macht, und die hier und jetzt von jedem betrieben werden kann. Dies kann man leider nicht von der Schulmathematik sagen. Für diese gilt weithin die bitter-ironische These „Unverstandene Fragen werden mit undurchschaubaren Algorithmen zu Lösungen geführt, die nicht interessieren" (Galin/Ruf, 1990). Woran liegt das? Eine wichtige Ursache dafür sehe ich darin, dass im schulischen Mathematikunterricht Mathematik vornehmlich als eine Sammlung von Regeln dargestellt wird. Der einzelne Schüler muss sich einem übergeordneten Regelsystem von großer Autorität anpassen. Daher wird in der Schulklasse Mathematik nicht produziert, sondern reproduziert. Dies gilt gleichermaßen für Schüler wie für Lehrer. Im Mathematikunterricht dreht es sich wesentlich darum, dass die Schüler dieses Regelsystem übernehmen. Dazu ist nicht einmal erforderlich, dass sie diese Regeln (z.B. Rechenalgorithmen) mathematisch verstanden haben. Mathematische Algorithmen können auch ohne Einsicht in ihre innere Logik angewandt werden und zu richtigen Ergebnissen führen. Nur deshalb sind Rechenmaschinen möglich. Den Schülern wird dadurch nahegelegt, sich wie „Auto-Mathen“ (Baruk, 1989) zu verhalten. Viele von ihnen verweigern sich angesichts dieser Zumutung der Mathematik, andere passen sich blind an.

Vor 26 Jahren gründete Michael Butler an der Univercity of California at Irvine (UCI) in Kalifornien die UCI Farm Elementary School. Sein Ziel war es, einen Mathematikunterricht zu entwickeln, der die Freude der Kinder an quantitativen und logischen Zusammenhängen erhalten und noch vertiefen sollte. Sein Ansatz war und ist, dass die Schüler im Mathematikunterricht nicht „Mathematik“ lernen, sondern lernen, als Mathematiker zu arbeiten, Mathematik zu betreiben, um der Freude an der Mathematik willen. Diese Schule besteht heute noch und hat inzwischen ein detailliertes Curriculum für Mathematik in den Stufen 0 (Kindergarten/Vorschule) bis 6 entwickelt. Dieses Curriculum lässt es zu, dass die Schüler eigene mathematische Wege gehen, indem sie z.B. eigene Algorithmen entdecken.

Ich habe diese Schule im Rahmen des von Klaus Holzkamp 1994 initiierten Projektes „Subjektwissenschaftliche Lernforschung“ für 3 Wochen besucht[1] und für ein Jahr (1995/96) dort als Mathematik-Lehrer in den Jahrgangsstufen 4-6 gearbeitet. Ich will im folgenden Beispiele aus dieser Arbeit zur Diskussion stellen.

2. Ein Spiel wird ernst genommen

Bericht von einer Unterrichtsstunde in Mathematik an der UCI Farm Elementary School. Die Arbeitsgruppe besteht aus vier Mädchen (C, E, K und S) und einem Jungen (J) der 4. Jahrgangsstufe im Alter von 10 Jahren.

L: Ich möchte euch ein Spiel mit 3 Ziffern zeigen, bei dem man Addition und Subtraktion braucht.[2] Denkt euch drei verschiedene Ziffern zwischen 1 und 9. (Beispiel: 2,3,5)[3] Bildet daraus eine dreistellige Zahl (Bsp. 325). Vertauscht die Reihenfolge der Ziffern, so dass eine neue Zahl entsteht (Bsp. 523). Zieht die kleinere Zahl von der größeren ab (Bsp. 523-325 = 198).

Die Schüler gehen auf dieses Angebot ein. Sie arbeiten parallel zu den Schritten, die ich nenne.

L: Vertauscht im Ergebnis noch einmal die Reihenfolge der drei Ziffern (Bsp. 891) und addiert die letzten beiden Zahlen (Bsp. 198+891 = 1089).

---

[1] Mit einer Gruppe von Teilnehmern vom Projekt „Subjektwissenschaftliche Lernforschung“.

[2] Addition und Subtraktion dreistelliger Zahlen ist für diese Schüler ein vertrautes Verfahren, mit dem sie allerdings unterschiedlich gut zurechtkommen.

[3] Die Beispielrechnung füge ich hier zum besseren Verständnis ein. Der Leser möge eigene Ziffern wählen und die Rechenschritte nachvollziehen.

Es dauert eine Weile, bis alle Schüler mit ihrer Rechnung fertig sind. Rückfragen zu den einzelnen Schritten werden gestellt. Dann vergleichen wir die Ausgangszahlen und die Ergebnisse der Rechnung. Alle haben verschiedene Ausgangszahlen gewählt. Zwei von ihnen (J und C) finden als Ergebnis 1089, die Ergebnisse der Anderen weichen davon und untereinander ab. Die Übereinstimmung in zwei Fällen veranlasst diese, ihren Weg nachzurechnen. Die beiden mit den übereinstimmenden Ergebnissen wählen sich jeweils drei neue Ziffern und prüfen, ob sich wiederum das Ergebnis 1089 ergibt. Dies endet schließlich darin, dass alle 5 das Ergebnis 1089 erhalten. Dies führt zu einem gemeinsamen „Aha"-Erlebnis. Befriedigung über das Erreichte ist dabei und Genugtuung über die gegenseitige Bestätigung. Auch Staunen über das überraschende Ergebnis. Jetzt stelle ich ihnen eine neue Frage.
L: Was kommt heraus, wenn man vier Ziffern wählt?
Alle nehmen diese Frage an, und beginnen erneut zu rechnen. Am Ende der Stunde haben sich alle an vier Ziffern versucht. Drei (J,C,E) sind fertig geworden und können ihre Ergebnisse vergleichen. Diese stimmen nicht überein. C und E glauben jedoch, dass sie sich verrechnet haben und dass das Ergebnis von J (10890) den übereinstimmenden Wert angibt. Zwei brauchen die ganze restliche Stunde für diese Rechnung und erhalten dabei von mir Unterstützung in der Arithmetik.

Für einen Schüler (J) wird dieses spielerische Umgehen mit Zahlen zum Anstoß für eine weitergehende Untersuchung über diese Stunde hinaus. Er hatte bereits in der ersten Stunde die Rechnung auf 5 und 6 Ziffern erweitert und dabei nicht nur erneute Gleichheit der jeweiligen Ergebnisse gefunden, sondern auch begonnen, ein Muster in der Folge der Ergebnisse zu „ahnen" (1098, 10890, 109890, ...). In den folgenden beiden Stunden lasse ich ihn auf seinen Wunsch daran weiterarbeiten. Er kommt schließlich bis auf 12 Ziffern.[4] Auf Grund des Musters, dass er in der Folge der Ergebnisse erkannt hat, kann er seine eigenen Rechnungen überprüfen und erkennt Rechenfehler, die ihm unterlaufen sind. Er will die Arbeit mit nach Hause nehmen, um sie seinen Eltern zu zeigen und um weiter daran rechnen zu können. Ich gebe ihm eine Mappe, in die er seine seitenlangen Berechnungen einordnet.

Die Struktur der Schüler-Aktivitäten

An zwei Stellen wirkt der Lehrer unmittelbar strukturierend auf die Schüleraktivitäten ein: Bei der Einführung des Spiels und bei der Erweiterung des Spiels auf 4 Ziffern. Ansonsten regulieren die Schüler ihre Aktivitäten im Rahmen der Schule weitgehend selbst.

Auf die erste Anregung folgt die gemeinsame Beschäftigung mit drei Ziffern. Daraus entwickeln sie die erste Hypothese, dass das Ergebnis

[4] Dabei treten notwendig auch gleiche Ziffern auf.

unabhängig von der Wahl der drei Ziffern gleich 1089 ist. Da einige abweichende Ergebnisse hatten, weist diese Hypothese über den erreichten Stand hinaus, sie muss daher noch bestätigt werden. Als Methode wählen sie die Wiederholung der Rechnung mit den gleichen oder mit neuen Ziffern. Mit neuen Ziffern rechnen diejenigen, die im ersten Durchgang Übereinstimmung erzielt hatten. Die übrigen wiederholen die Rechnung mit den gleichen Ziffern. Da nun sieben übereinstimmende Ergebnisse vorliegen, erfährt die Hypothese eine überzeugende Bestätigung. Die Schüler erfahren die Evidenz der Hypothese. (Ein strenger mathematischer Beweis liegt jedoch noch nicht vor, weil eine Überprüfung an Beispielen keine Allaussage beweisen kann.) Hier erfolgt die zweite Anregung, indem der Lehrer das Spiel auf 4 Ziffern erweitert. Die Schüler vermuten, dass auch in diesem Fall die Ergebnisse übereinstimmen werden. Unklar ist ihnen nur der Wert des Ergebnisses. Sie lassen sich dazu anregen, eine zweite Hypothese aufzustellen. Auch diese Hypothese ist in ihren Augen beweispflichtig. Zum Nachweis wird im Prinzip die Methode gewählt, mit der sie schon beim Nachweis der ersten Hypothese erfolgreich waren. Hier trennen sich wieder die Wege der Schüler entsprechend ihren Fähigkeiten im Rechnen mit dreistelligen Zahlen. Zwei Schüler/innen (K und S) können die Rechnung in dieser Stunde nicht beenden. Für sie war diese Stunde eine Übung in Arithmetik. Dasselbe kann mit Einschränkung auch von C und E gesagt werden, die zwar fertig wurden, aber abweichende Ergebnisse erzielten. Sie haben ihre arithmetischen Fähigkeiten erprobt, aber auch versucht, wie beim ersten Mal zum Nachweis der Hypothese beizutragen. Für J schließlich steht der Nachweis dieser Hypothese und weiterer selbst aufgestellter Hypothesen im Vordergrund, die Arithmetik ist ihm ein verlässliches Verfahren, um dieses Ziel zu erreichen. Es ist schließlich die mathematische Autorität von J, die sein Ergebnis für die anderen glaubhaft macht. Für alle ist damit die zweite Hypothese nachgewiesen.

Das Spiel ist für vier Schüler/innen nun ausgespielt, nur J setzt sich neue Regeln und spielt weiter.

Der Standpunkt des Subjekts

Warum gehen die Schüler auf die erste Anregung des Lehrers ein? Sie machen eine Diskrepanz-Erfahrung. Üblicherweise erwartet man unterschiedliche Ergebnisse, wenn man bei derselben Rechnung von unterschiedlichen Zahlen ausgeht. Hier ist diese Regel durchbrochen. Das schafft Aufmerksamkeit.

Die Bestätigung der ersten Hypothese ist ein gemeinsames Erfolgserlebnis. Sie erleben die Evidenz ihrer Hypothese: Das ist so. Wir wissen es, weil wir es selbst geprüft haben.

Dieses Erfolgserlebnis gibt ihnen das Selbstvertrauen, die zweite Hypothese aufzustellen und den Nachweis zu versuchen.

Die Schüler haben zwar alle gerechnet, aber doch sehr unterschiedliche Aktivitäten ausgeführt. Der Unterricht ist von daher stark differenziert, aber die Differenzierung wird nicht vom Lehrer organisiert, sondern von den Schülern selbst entschieden. Es wird nicht gewertet, wie weit die einzelnen Schülerinnen und Schüler gekommen sind. Es ist legitim, aus- und einzusteigen. Raum- und Zeitgrenzen lassen sich individuell anpassen.

Die Schüleraktivitäten werden in vielen strukturierenden Details nicht vom Lehrer organisiert.[5] Der Lehrer macht lediglich Angebote, die Schüler gehen darauf ein, hätten aber auch ablehnen können. (Das ist vorgekommen.) Die Schüler ergreifen das Thema und produzieren im Verfolgen dieses Themas eine erstaunlich strukturierte Aktivitätsfolge. Die Struktur ihrer Aktivitäten misst sich dem Gegenstand an. Sie sind offenbar in der Lage, solche Aktivitäten gemeinsam zu planen, aufeinander abzustimmen und auszuführen.

Die Stunde war mit der mathematischen Praxis dieser Gruppe und jedes Einzelnen in dieser Gruppe, einschließlich des Lehrers, ausgefüllt. Was ist das Mathematische an dieser Praxis?

Mathematik-Unterricht als mathematische Praxis: Die Schüler arbeiten als Mathematiker

Die Tatsache, dass sich die Schüler mit Zahlen beschäftigt und sich dabei mathematischer Verfahren (der Arithmetik) bedient haben, besagt noch nicht, dass es sich hierbei um eine mathematische Praxis handelt. Was macht die Arbeit von Mathematikern aus? Genauer, welches sind die konkreten, aufweisbaren Merkmale der Aktivitäten von Mathematikern, die diese Praxis erkennbar zur Praxis eines Mathematikers machen? (Livingston, 1987)

Über einen spielerischen Einstieg lassen sich die Schüler in eine Fragestellung hineinziehen, die keinen unmittelbar erkennbaren Anwendungsbezug hat. Sie lassen sich überraschen, werden neugierig und sind bereit, daran zu arbeiten. Sie arbeiten, bis sie zu einem Ergebnis gekommen sind, in dem sie alle übereinstimmen. Sie haben ein Evidenz-Erlebnis gemeinsam produziert und geteilt.

Ziel der mathematischen Praxis ist es, Evidenz in der Bezugsgruppe von Mathematikern zu erzeugen. Evidenz wird erzeugt durch anerkannte Beweisverfahren.

[5] Welche Methode wird gewählt? Wer rechnet mit neuen, wer mit seinen alten Ziffern? U.A.

Motive

Der Stunden-Einstieg des Lehrers „Ich möchte euch ein Spiel mit 3 Ziffern zeigen,...“ soll nicht versüßen, was eigentlich bitter ist. Er soll keine (Wahl)Freiheit vortäuschen, die nicht vorhanden ist: wenn die Schüler auf die Frage nicht eingehen, dann versucht es der Lehrer mit anderen Fragen. Der Lehrer nimmt das Spiel als Spiel ernst und missbraucht es nicht zur „Motivierung“ der Schüler.

„Was wäre ... wenn wir mit dreistelligen Zahlen spielen, Ziffern vertauschen und herumrechnen?“ Darauf lassen sich Kinder (wie Mathematiker) gerne ein. Von diesem Einstieg lassen sie sich gerne zum Mittun einladen. Es gibt auch nichts zu befürchten, keine Abqualifizierung und keine Niederlagen.

Unbelastet von Angst oder anderen Nöten folgen Kinder leicht und schnell den Anregungen. Sie schauen, was die anderen tun, die unmittelbaren Nachbarn vor allem. Sie schauen, wo der Spaß ist, wo etwas Neues ist, wo sie sich bewähren können, wo sie Bestätigung bekommen können. Sie lassen sich gerne auf Aktivitäten ein, deren Struktur und Ziele sie selbst bestimmen, und sie strengen sich gerne an dabei. Sie tun ungern die Dinge, die man ihnen vorschreibt, hier, jetzt und auf eine bestimmte Weise zu tun. Kinder und Jugendliche sind hungrig auf interessante Aktivitäten.

Hier kommt dazu, dass die Frage nur anscheinend abgehoben von der Erfahrungswelt der Schüler ist. Die Ergebnisse widersprechen der alltäglichen Erfahrung: Wenn man von verschiedenen Voraussetzungen ausgehend das Gleiche tut, so erhält man unterschiedliche Resultate. Diese Diskrepanz zwischen Alltagserfahrung und dem Ergebnis hier macht aufmerksam, weist darauf hin, dass es hier etwas zu entdecken gibt. Holzkamp spricht hier von einer „Lerndiskrepanz“ (1995). Der Realitätsbezug liegt auf der konzeptionellen Ebene. Aus ihm mögen sich letztlich die Gründe herleiten, die jeden einzelnen Schüler zu den Aktivitäten bringen, in denen wir sie beobachten.

Lerngegenstand

Der potentielle Lerngegenstand besteht in den arithmetischen Zusammenhängen zwischen bestimmten Zahlen unter bestimmten Umständen. Er lässt sich in verschiedene Richtungen verallgemeinern und vertiefen: Durch Zulassen gleicher Zahlen, Verändern der Anzahl der Ziffern, Auffinden von Ausnahmen und schließlich durch Aufdecken des inneren Zusammenhangs zwischen den Zahlen und dem immer gleichen Ergebnis. Einen Schritt in diese Richtung haben alle getan (Erweiterung auf vier Ziffern). Mit dem Aufstellen der Ergebnisfolge ist J am weitesten in dieser Richtung vorgedrungen. Die verschiedenen Dimensionen des Lerngegenstandes sind den Schülern in unterschiedlichen Graden zugänglich.

Der Lerngegenstand hat für sie unterschiedliche „Tiefe“ (Holzkamp, a.a.O.). Gemeinsam ist ihnen, dass sie begreifen, dass der Lerngegenstand als solcher (und nicht als Mittel zum Zweck) Aufmerksamkeit verdient. Ich glaube, dies wird erst möglich durch die oben genannte Diskrepanz-Erfahrung, die durch die Beschäftigung mit dem Gegenstand ausgelöst wird.

Lernschleifen

Aus der Übereinstimmung zweier Ergebnisse (bei drei Ziffern) haben alle Schüler die erste Hypothese gebildet. Der Nachweis dieser Hypothese wird zur Bezugshandlung. Als Methode wird angewandt, die Hypothese in Einzelfällen durch Rechnung zu verifizieren. Die Schüler, die ein abweichendes Ergebnis hatten, vermuteten einen Fehler in der eigenen Rechnung und waren sich ihrer arithmetischen Fähigkeiten (soweit sie in dieser Bezugshandlung erforderlich sind) nicht sicher. Sie traten in eine „Lernschleife“ ein, die nach Klaus Holzkamp (a.a.O.) schon in einer einfachen Wiederholung der Bezugshandlung liegen kann. Tatsächlich haben diese Schüler mehr als wiederholt, sie haben ihre Arithmetik überdacht und sich auch Hilfe von mir geholt. (Etwas Ähnliches kann man über J sagen, dessen Lernschleifen allerdings erst bei Zahlen mit mehr als acht Stellen auftraten.) Durch die Reproduktion des Ergebnisses 1089 haben sie zwei Fliegen mit einer Klappe geschlagen: Erstens haben sie ihre eigene arithmetische Sicherheit erhöht, und zweitens haben sie zu der Anzahl der verifizierten Fälle beigetragen, also in der Lernschleife gleichzeitig ihre Bezugshandlungen erledigt. Die Schüler, die von vornherein übereinstimmende Ergebnisse hatten, waren sich ihrer arithmetischen Fähigkeiten sicherer und konnten sich daher direkt der Bezugshandlung zuwenden. Auch sie wiederholen die Rechnung, allerdings nicht in der Absicht (die Arithmetik) zu lernen, sondern als Aktivität innerhalb der Bezugshandlung.

Insgesamt haben die Schüler die Erfahrung gemacht, dass sie über hinreichende Fähigkeiten verfügen, um Fragen dieser Art zu klären; sie haben ein Beispiel für eine All-Aussage erlebt und sie haben ein gemeinsames Evidenz-Erlebnis gehabt. Auf der Basis dieser Erfahrungen konnten sie die neue Frage mit vier Ziffern und die damit inaugurierte neue Problematik annehmen.

Die Lerngruppe: Eine Kohorte von Mathematikern

In dieser Gruppe (fünf Schüler und ein Lehrer) ist etwas produziert worden, was über mathematische Aussagen hinausgeht: Es ist ein gemeinsames Evidenz-Erlebnis erzeugt worden. Die Additions- und Subtraktions-Algorithmen haben ihre Gültigkeit gezeigt, sie haben an Beweiskraft in dieser Gruppe gewonnen.

Indem jeder Schüler ein Stück zu der Hypothese „Das Ergebnis ist immer gleich“ beigetragen hat, haben sie den Wert der Zusammenarbeit erfahren können. Sie haben eine gemeinsame Praxis erlebt, die den ersten Schritt zur Aufstellung einer allgemeingültigen Aussage darstellt. Damit haben sie begonnen, das ihnen Gegebene in Richtung auf ein hinter dem Gegebenen liegenden tieferen Zusammenhang zu transzendieren. Sie haben erlebt, dass diese Praxis für Einzelne zu einem Ansatzpunkt für weitere Untersuchungen führen kann, die neue Zusammenhänge aufdecken. Sie haben alle die Motivation verstärkt, sich auf solche Spiele und mathematischen Untersuchungen einzulassen. Dies alles haben die Schüler durch eine von ihnen selbst angemessen strukturierte mathematische Praxis erreicht. Diese Praxis hielt sich aus sich heraus aufrecht, erzeugte aus sich heraus Offenheit für neue Fragen. Nahezu eine Stunde lang hat die Gruppe eine gegenstandsadäquate Ordnung ihrer Aktivitäten erzeugt und selbst aufrechterhalten. Diese logische, soziale, funktionale Ordnung „wurde an diesem Ort produziert, hier und jetzt, mit den Mitteln, die ... (den Schülern, TB)... zur Verfügung stehen.“ (Livingston, 1987).

Mathematik zu betreiben setzt voraus, dass man eine bestimmt strukturierte soziale Ordnung in der eigenen Praxis produziert, mit anderen zusammen. Livingston nennt solche Gruppen „Produktions-Kohorten“. Wenn im Mathematikunterricht Mathematik produziert wird, dann ist die Lerngruppe (Schüler und Lehrer) eine Produktions-Kohorte. Die Aktivitäten einer Kohorte „sind reflexiv, selbst organisierend, vollständig in situ, d.h. lokal, organisiert.“ (Ebd. 10). Die Kohorte produziert Mathematik als ein Stück sozialer Ordnung. Die mathematische Praxis wird als eine natürlich organisierte, gewöhnliche Praxis aufgefasst, wobei „natürlich organisiert“ meint, dass „die Organisation Teil und Paket der Aktivität selbst ist, wodurch die Aktivität zu dem wird, was sie ist.“ (Ebd,10) (Die mathematische Produktions-Kohorte zeichnet sich durch einen gemeinsam erarbeiteten mathematischen Wissensstand aus. Durch ein gemeinsames Verständnis von Evidenz, durch einen gemeinsamen Pool von Methoden, um zu einem Evidenz-Erlebnis zu kommen. Durch eine gemeinsame Textur, eine gemeinsame Art, zwischen den Zeilen zu lesen, Lücken zu ergänzen u.Ä. In dem Begriff der Kohorte steckt vor allem die Idee der Entwicklung dieser Gruppe durch sich selbst, d.h. durch die selbst-organisierten Aktivitäten der Kohorte.

Entwicklung findet nicht nur statt hinsichtlich des Wissensstandes, sondern vor allem auch hinsichtlich der Methoden, zu Evidenz-Erlebnissen zu kommen, und schließlich hinsichtlich der möglichen Evidenz-Erlebnisse. Man muss hier von der Entwicklung einer mathematischen Arbeitskultur und Arbeitshaltung sprechen. Die Lerngruppe als Produktions-Kohorte hat eine Geschichte und damit eine Tradition, in der Regeln, Normen, Selbstverständlichkeiten, Methoden, Wissen usw. verankert sind.

Unterstützung

Der Lehrer hat in dieser Stunde nicht „gelehrt". Dennoch haben die Schüler gelernt. Der Lehrer hat durch eine Problemstellung und eine Zusatzfrage eine Praxis initiiert. In dieser Praxis haben die Schüler unterschiedliche Arten von Unterstützung erhalten. Durch diese Praxis haben sowohl sie als auch der Lehrer gelernt. Der Lehrer ist als Mathematiker ein Teil dieser Gruppe. Er geht aber nicht in dieser Gruppe auf. Aus dem ihm zugänglichen Fundus an mathematischem Wissen, Problemen und Methoden steuert er immer wieder Fragen und Probleme bei, die von den Schülern aufgegriffen und weiterentwickelt werden können. Er weiß, dass das induktive Verfahren zur Bestätigung der Hypothese in der Gruppe der Fachmathematiker keine Beweiskraft hat, allenfalls wird die Plausibilität der Hypothese erhöht. Er wird sich aber hüten, die Hypothese mit solchen Gesichtspunkten anzuzweifeln, die von der konkreten Situation abgehoben sind. Etwa, indem er geltend macht, dass dies kein Beweis ist, weil aus allen denkbaren Fällen nur wenige überprüft wurden. Er kann allerdings die Hypothese problematisieren, indem er ein Gegenbeispiel anführt. Neben Anstößen zur Entwicklung des mathematischen Wissensstandes der Gruppe trägt er also auch zur Entwicklung des Evidenz-Verständnisses in der Gruppe bei. (Sehr oft finden Schüler eine Aussage evident und sehen nicht die mathematische Notwendigkeit für einen Beweis: Was soll man beweisen, es ist doch eh klar!)

Der Lehrer tritt bei der Steuerung der konkreten Aktionen zurück. Er versucht den Selbstlauf der Gruppe zu unterstützen.

Er kann gefragt werden - zur Unterstützung, wenn man nicht weiterkommt oder wenn man neue Frageperspektiven sucht. Er versucht, sich in die Problemlage des Schülers hineinzuversetzen und Anregungen zu geben. Er vermeidet es, Antworten zu geben, weil Antworten geistiger Raub sind. Die Unterstützung durch den Lehrer ist nur ein Teil der Unterstützung, die jeder tatsächlich durch die Gruppe bekommt. Diese Unterstützung wird in meinem Beispiel an mehreren Stellen deutlich: Es hilft Schülern, wenn mehrere sich einem Thema zuwenden. Die richtigen Ergebnisse einiger erlauben anderen, Fehler in ihrer eigenen Arbeit zu entdecken und daraufhin ihre Ergebnisse zu überprüfen; die Gruppe nimmt konkrete Arbeit ab, die Gruppe bestärkt im Evidenz-Erlebnis.

Die Bedeutung des thematischen Aspekts

Wenn ich einen Schüler frage, wie viel ein Halbes und ein Drittel zusammen ergeben, so antwortet er (vielleicht) 5 Sechstel. Wenn ich denselben Schüler frage, warum das Ergebnis richtig ist, so wird er algorithmisch antworten (Man bringe die Brüche auf den Hauptnenner und addiere die Zähler); wenn ich ihn frage, warum der Algorithmus richtig ist, wird er sagen, „Weil das so ist". Eine Lösung ist richtig, weil es einen Algorithmus gibt, der diese Lösung produziert. Das ist ein algorithmisches, aber kein mathematisches Verständnis von dieser Welt. Der Algorithmus muss begründet werden, wenn der Algorithmus selbst zum Grund werden soll. In der Oberstufe führen wir den algorithmischen Weg verstärkt fort und stellen entsprechende Anforderungen an die algorithmischen Fertigkeiten unserer Schüler. Dieser Anspruch wirkt auf die unteren Schulstufen zurück. Wenn man Mathematik nicht nur als algorithmische Weltbeherrschung, sondern auch als ein bestimmtes Weltverständnis, als eine Art „zur Welt zu sein“, auffasst, dann muss man erstens sagen, welches Weltverständnis damit gemeint ist, und zweitens ob man diese Art von Mathematik an der Schule betreiben kann.

Ich kann mir keine sinnvolle Methode ausdenken, wie ich diese Mathematik *lehre*, ich kann aber über Umstände nachsinnen, die es Schülern möglich machen, diese Mathematik zu *lernen*. Dazu muss ich den Standpunkt wechseln, vom Lehrenden zum Lernenden. Aus den für mich als Lehrer so selbstverständlichen Lehr-Zielen werden aus der Sicht des lernenden Subjekts fremdgesetzte Lern-Anforderungen, zu denen es sich verhalten muss. Dabei spielt der thematische Aspekt eine wichtige Rolle, die Frage also, was dem Subjekt zum strukturierenden Leitthema seiner Aktivitäten werden kann. Ein Mathematikunterricht, der sich vom Standpunkt des Subjektes entwickeln kann, muss den thematischen Aspekt in den Vordergrund stellen. Daher gewinnen Verfahren, die, wie Beweise, zu Evidenz-Erfahrungen führen, eine besondere Bedeutung für den Mathematikunterricht.
Ist es möglich, dass Schüler in der Grundschule schon Beweise führen?

3. Ein Beweis entsteht

Die Situation

UCI Farm School, ein normaler Tag im Big Kids House. Die Buppers (5. Jahrgang) haben Mathematik-Unterricht bei mir. Ich bin mit 9 Buppers in einem Raum, der auch als Küche und Speisezimmer dient. Die Türen zu den Nachbarräumen sind offen, dort arbeiten die Schüler im 4. und 6. Jahrgang mit ihren Lehrern. Studenten der UCI beobachten die Aktivitäten, machen Tonbandaufnahmen oder arbeiten mit einzelnen Schülern. Die Buppers arbeiten an „Math Packs“, das sind mathematische Aufgaben, Probleme, Rätsel, Labyrinthe, Bilder und Texte, die ich ihnen einmal wöchentlich zusammenstelle. Die Math Packs sollen innerhalb einer Woche bearbeitet werden.

Der Schüler R, 11 Jahre alt, ist gelangweilt von diesen Aufgaben und fragt mich, ob ich ein „Problem“ für ihn habe. Darunter versteht er eine spannende, knifflige Mathematik-Aufgabe. Ich frage ihn, ob er ein Problem lösen will, das gerade in der 6. Jahrgangsstufe Thema ist. R ist einverstanden, und ich schreibe ihm ein mathematisches Problem auf ein

Blatt Papier, das er mir hinhält. Ich dokumentiere im folgenden die Interaktion, die sich zwischen R und mir daraufhin entwickelt. Die eingerahmten Textteile sind Zitate aus den Arbeitsblättern.

Die Interaktion

L:	4/9 = 6/x	x = ?
S:	15	
L:	4/9 = 6/15 ?	

Nachdem seine erste Idee „15“ falsch war, wird R nachdenklich und zieht sich in eine ruhige Ecke des Hauses zurück. Nach einiger Zeit zeigt er mir seine Lösung

S:	x = 13 ½

Es gibt viele Möglichkeiten, auf dieses Ergebnis zu kommen. Ich lasse mir von R seinen Weg zeigen. Ich gebe den Weg in meinen Worten wieder: Er vergleicht die Zähler, 4 und 6, und erkennt, dass 6 das Eineinhalbfache von 4 ist. Daher ist x das Eineinhalbfache von 9, also x = 9 + 4 ½ = 13 ½ . Ich sehe, dass ich diesen Lösungsweg möglicherweise durch das relativ einfache Verhältnis 6:4 der Zähler nahegelegt habe. Ich stelle ihm daher die Aufgabe neu mit einem anderen Verhältnis der Zähler. Allerdings ist R‘s Aufmerksamkeit für dieses Verhältnis geweckt.

L:	3/5 = 8/x
S:	x = 13 1/3

R löst diese Aufgabe vor meinen Augen: er bildet den Quotienten der Zähler 8:3, mit diesem Wert (2 2/3) multipliziert er den Nenner 5 und erhält x = 10 + 3 1/3 = 13 1/3.

Erstaunlich ist, dass R sich seines Lösungsweges so sicher ist, dass er eine rechnerische Überprüfung (auch mit Taschenrechner) gar nicht erst in Erwägung zieht.

Diese zweite Lösung und die Art, wie R sie produzierte, überzeugen mich davon, dass R sich seines Verfahrens so sicher ist, dass er es reproduzieren kann. Damit hat er die Möglichkeit gewonnen, sein Verfahren für sich selbst evident zu verallgemeinern. Ich stelle ihm die Aufgabe daher in allgemeiner Form:

L:	a/b = c/x	x = ?

Dieses Problem macht hinreichend Eindruck auf R, so dass er sich wieder zurückzieht. Ich wende mich wieder den anderen Schülern zu, die einzeln oder in Gruppen an unterschiedlichen Aufgaben arbeiten.
Meine Gespräche mit R sind nur ein Teil meiner unterrichtlichen Arbeit. Mehrmals muss er auf mich warten, wir wurden öfters durch andere Schüler unterbrochen.

R kommt mit dieser Lösung zurück:

S: c = y ∗ a b ∗ y = x y = c : a

Ich sehe, dass in diesen drei Zeilen die Lösung und der Beweis dieser Lösung dokumentiert sind. Dies ist meine erste Rückmeldung. Es ist zunächst bemerkenswert, dass R eine neue Größe y einführt, der er eine zentrale Stellung in diesem Beweis gibt. In Zeile 1 wird damit zum Ausdruck gebracht, dass c ein Vielfaches von a ist. In der zweiten Zeile wird y benutzt, um die Lösung x zu berechnen. In der dritten Zeile wird y definiert. In dem „konstruktiven Erkennen" von y liegt die Kern-Idee dieses Beweises. Diese Idee wurde offenbar durch R's mathematische Praxis, das konkrete Ermitteln von zwei Lösungen, nahegelegt. In der Konstruktion von y liegt daher eine Abstraktion von seiner vorausgegangenen Lösungspraxis. Diese Abstraktion wird von R geleistet. Darin beruht seine originäre mathematische Leistung.

Ich zeige R durch mein Interesse, wie mich seine Arbeit beeindruckt. Er sieht aber auch, dass ich Schwierigkeiten habe, seine Darstellung zu verstehen. Ich erinnere ihn an die Struktur, die ich ihm schon früher für Problemlösungen vorgeschlagen habe: Problem/Lösung/Beweis. Ich frage ihn, ob er diese Struktur auf dieses Problem anwenden will. R verzieht sich erneut und bringt mir nach einer Weile folgendes Ergebnis seiner Arbeit.

the problem a/b = c/x x = what? *solution* x = b ∗ (c : a) *prove* c : a = y y∗ b = x R.... J.....

Dies ist ein Beweis-Dokument von ungewöhnlicher Qualität. Der eigentliche Beweis (prove) ist auf die zwei wesentlichen Sätze verkürzt. Die Definition von y wird an den Anfang gestellt, wo sie auch hingehört. Umgangssprachlich könnte man die Zeichenfolge etwa so beschreiben: Wenn man y so (.) berechnet, kann man damit x so (..) berechnen. Durch seine Unterschrift zeigt R, dass er sich mit dieser Arbeit identifiziert. (Im Original hat er mit seinem vollen Namen unterschrieben.)

R's Lösungsweg

Die „Entdeckung" von y

R's Lösungsweg wird durch den Einfall bestimmt, eine neue Größe y einzuführen, die sich als Angelpunkt der Argumentation erweist. Y tritt

im Beweis (prove) auf, in der Lösung (solution) aber nicht mehr. Es tritt wie ein Katalysator in den Lösungsprozess ein. Y ist ein von R konstruiertes Hilfsmittel zum Verständnis des Problems. Er hat damit für sich selbst und andere einen Trittstein gefunden, der ihn weiterbringt, den er aber hinter sich lässt. In der „Schöpfung von y" liegt der Kern dieses kreativen Prozesses. Was geschieht hier? Allgemein gesprochen wird hier ein Prozess mit seinem Ergebnis identifiziert. In y wird der Prozess „das Verhältnis c:a bilden" quasi eingefroren. Die in dem Zeichen „c:a" liegende Bedeutung wird von ihrem prozessualen Aspekt abstrahiert, statt dessen tritt ihr formaler Aspekt in den Vordergrund. Aus der Berechnung des Verhältnisses zweier Zahlen wird eine „rationale Zahl". In der Konstruktion von y entdeckt R also auch die rationalen Zahlen für sich. Diese Fixierung eines Verhältnisses ist insofern bedeutsam, als dadurch „Zähler" und „Nenner" wahrnehmbar werden. Dadurch verringert sich die Komplexität des Problems: aus den ursprünglich vier Größen sind jetzt drei geworden. Im Beweis (prove) steht die Definition von y daher an erster Stelle. Der Beweis ist auf die zwei wesentlichen und unverzichtbaren Sätze verkürzt:
(1) Die Zähler stehen in einem Verhältnis $a*y=c$
(2) die Nenner stehen im gleichen Verhältnis $b*y=x$.
Der erste Satz ist in der äquivalenten Fassung $c:a=y$ notiert, dadurch folgt die Lösung als nahezu triviale Einsetzungsoperation ($b*[c:a]=x$).

Lösung und Beweis

Die Lösung fixiert die Lösungspraxis in einer Rechenvorschrift. Sie bringt die Lösungspraxis auf einen Begriff. Dadurch kann diese Praxis wiederholt, nachgeahmt und auch gelehrt werden. Die Lösung ist als Regel formuliert. Diese Regel kann bewusstlos (mit dem Taschenrechner oder in einem Computer) angewendet werden. Der richtig angewandte Kalkül garantiert das richtige Ergebnis. Die Lösung ist nicht auf Begründen/Verstehen optimiert. Sie wirkt eher verwirrend. Kinder fragen angesichts einer solchen „Lösung": „Wieso ist x gerade so zu berechnen?"

Auch der Beweis gibt eine Regel an: Wenn man y so (.) berechnet, kann man damit x so (..) berechnen. Der Beweis ist aber noch mehr. Er gibt nicht nur die Regel, er gibt auch gezielte Hinweise zur Begründung der Regel, nämlich dass Zähler und Nenner im gleichen Verhältnis stehen. Der Beweis ist die Regel, die den Weg zu ihrer eigenen Begründung enthält. Das unterscheidet den Beweis von der Lösung, die eher mit einer Gebrauchsanweisung vergleichbar ist. Der Beweis zielt auf die Erzeugung eines Evidenz-Erlebnisses beim Leser, indem er dem Leser eine Praxis nahe legt, in deren Vollzug sich die Regel als begründet herausstellen wird. Hier liegt ein großes emanzipatorisches Potential der Mathematik, denn jede Regel muss nachprüfbar und einsichtig begründet werden.

Beweis-Dokument und lebendige Beweis-Arbeit[6]
Schon der erste „Dreizeiler“ von R ist ein Beweis-Dokument. In ihm ist R‘s lebendige Lösungs-Arbeit aufgehoben. In der zweiten Fassung wird das Dokument unter bestimmten Gesichtspunkten (Irredundanz, Verständlichkeit) optimiert. Aber auch in dieser optimierten Fassung (dem „Zweizeiler“) fühlt sich der Leser zunächst verwirrt. Man versteht nicht sofort. Das Beweis-Dokument bleibt unklar und unvollständig, es zeigt und verbirgt, es muss erst durch den Leser in einer selbständigen Arbeit ergänzt und verstanden werden, die der ursprünglichen lebendigen Beweis-Arbeit des Verfassers analog ist. Der Zweizeiler ist eine Aufforderung, R´s Lösung als eine begründete zu erkennen, indem man dem durch Trittsteine markierten Weg geht. Mit dem Beweis-Dokument fixiert R seine lebendige Beweis-Arbeit, macht sie für sich und andere verfügbar und bindend. „Was hier steht, gilt und ich stehe dafür“ dokumentiert R durch seine Unterschrift.

Beweis und Evidenz
Die Vollendung eines Lösungsgedankens in einem Beweis hat auch den Effekt, dass ein neues Stück Evidenz geschaffen wird, und zwar für den Verfasser wie auch für die Gruppe von Mathematikern, an die er sich wendet. Beweise zu führen, ist der Mechanismus, der die Entwicklung der Evidenz ausmacht: Evidenz wird durch Beweise produziert. Evidenz wird aber zugleich für eine bestimmte Gruppe produziert, die Kohorte von Mathematikern, an die sich der Verfasser wendet. Für R besteht diese relevante Gruppe zunächst aus der Lerngruppe und dem Lehrer. R setzt in seinem Beweis die Gleichheit der Vielfachen in Zähler und Nenner als selbstverständlich voraus. Das ist eine Lücke in seinem Beweis, die jedoch auf dem mathematischen Niveau seiner relevanten Gruppe nicht sichtbar wird. Diese Lücke verhindert nicht die Evidenz-Erfahrung. Der Lehrer bezieht sich als ausgebildeter Mathematiker jedoch auf die Gruppe aller Fachmathematiker dieser Welt. Er müsste die Gleichheit der Vielfachen als Eigenschaft rationaler Zahlen begründen. Da R Brüche (noch) nicht als Äquivalenzklassen von Paaren ganzer Zahlen sieht, kann er sich in seinem Beweis-Dokument auch nicht darauf beziehen – es ist ihm selbstverständlich. Sein Beweis ist insofern zwar unvollständig, aber deswegen nicht falsch. Dieser Beweis bedarf, wie jeder Beweis, der Ergänzung durch den Leser.

Beweise und Gedichte
Wenn ich R‘s „Zweizeiler“ mit einer anderen von Menschen geschaffenen Produktion vergleichen will, so fällt mir das Gedicht ein. In seinem Zweizeiler wird eine Verdichtung von Information vorgenommen. Die Zeilen geben den Prozess nicht fotografisch wieder, sondern in Form

---

6 Vergleiche die Begriffsbildung ”proof-account” und ”lived-work of proving” (Livingston, 1987)

von Trittsteinen, die einen möglichen Weg andeuten. Der Sinn dieser Steine erschließt sich erst, wenn man sie in den Lösungsweg einfügt und benutzt. Schließlich erzeugt dieser Zweizeiler ein Gefühl: Evidenz.

Beweise sind sehr reiche menschliche Produkte, die zwar logisches Denken erfordern, aber auch Phantasie und Kreativität, die Rationalität und Emotionalität verbinden, reguläre und singuläre Momente wesentlich verknüpfen. Wie kann ein Mathematikunterricht aussehen, in dem diese Qualität mathematischer Beweise die Aktivitäten der Schüler formt?

Was Lehrer von diesem Beweis-Dokument lernen können
R zeigt einen Trittstein (die Definition von y), der ihm beim Finden der Lösung so geholfen hat, dass er ihn als wesentlichen Hinweis für das Verständnis auch für andere Menschen (insbesondere seiner Mitschüler) in seinem Beweis-Dokument aufschreibt. Lehrer neigen dazu, solche Trittsteine didaktisch zu verwenden, um Schülern einen Sachverhalt „verständlich" zu machen. Sie übersehen dabei leicht, dass nicht der Trittstein als solcher, sondern die Suche nach ihm bzw. die angemessene Verwendung beim Nachvollziehen der lebendigen Beweis-Arbeit seinen Wert für das Verständnis ausmachen.

R's Weg zur Lösung

Mit der Darstellung der lebendigen Beweis-Arbeit und deren Verdichtung und Fixierung in einem Beweis-Dokument ist ein möglicher mathematischer Lösungsweg beschrieben. Die Frage bleibt, warum dieser Weg für den konkreten Menschen R in dieser Situation ein erwünschter ist, den er gehen wird, weil er ihn gehen will.

Schritte eines motivierten Weges
R langweilt sich. Er hat viele Ideen im Kopf, was er machen könnte, aber jetzt ist Mathe, und da ist klar, dass er sich ernsthaft mit dem beschäftigen soll, was ich, der Mathematik-Lehrer, anzubieten habe. In der Regel sind darunter auch interessante Aufgaben. Da er diesmal in meinen Angeboten nichts Interessantes mehr findet, fragt er mich, ob ich ein neues Problem für ihn habe. Er weiß, dass ich spannende Probleme kenne, und dass ich ihn gerne an solchen Problemen arbeiten lasse. Die Aufgabe, die ich ihm gebe, scheint ihm zunächst sehr leicht zu lösen sein. Das erweist sich als Irrtum. Das Problem wird für R in dem Moment spannend, wie sich seine spontane Lösung „15" als falsch erweist. Hinter dem Problem steckt mehr, als er zunächst sieht. Das macht ihn neugierig. Jetzt ist er interessiert, und ich sehe es. Sein Interesse ist an vielen Details des Verhaltens wahrnehmbar.

R lässt sich in das Labyrinth der vier Symbole ein. Er stellt sich der Frage nach dem Wert von x. Er findet keine fertige Methode vor, mit der er das Problem lösen kann. Die Symbole stehen in einer neuartigen, verwirrenden Beziehung zueinander. Lohnt es sich, weiterzumachen? Das hängt davon ab, ob sich Ideen zur Lösung einstellen, ob es erfolgversprechend ist, ob es Spaß macht, und, und ...

Es lohnt sich offenbar. Er sucht weiter nach Lösungsansätzen, die in dem Problem verborgen sind. Ein Bild drängt sich auf 4 + 2 = 6. Zunächst ist noch nicht klar, was es nützt, da stellt sich das nächste Bild ein: 9 + 4 1/2 = x. Das ist die Lösungsidee. R ist von dem Weg sehr befriedigt. Er hat Lust, weiter an dieser Frage zu arbeiten. Die erste Wiederholung mit anderen Zahlen stellt eine Probe seines Lösungsweges dar. Die Problematik hat sich auf die Rechenproblematik reduziert. Es würde ihn vermutlich langweilen, wenn ich ihm eine weitere Aufgabe mit bekannten Zahlen stellen würde. Mein dritter Vorschlag, in dem ich die Zahlen durch Buchstaben ersetze, stellt eine neue und spannende Variante des Problems dar. (R hat noch nichts von Algebra gehört.) Die Rechenproblematik ist durch die Verwendung von Variablen ausgeklammert: es gibt nichts zu rechnen. Das Problem liegt jetzt darin, von dem eigenen Lösungsweg zu abstrahieren. Dies gelingt ihm durch Einführung der neuen Variablen y. Er freut sich über diese Leistung, und er ist zu Recht auf sich stolz. Daher lässt er sich auch auf meinen Vorschlag ein, seinen Weg in der Form Problem-Lösung-Beweis darzustellen. Er unterschreibt dieses Blatt selbstbewusst mit seinem vollen Namen.

Beweise

Ich sagte bereits, dass mathematische Beweis-Dokumente von ihrer Struktur her mit Gedichten vergleichbar sind. Ich halte das für eine zentrale Erkenntnis, die auch den potentiellen Lerngegenstand Mathematik wesentlich bestimmt. Die Sprache, in der Mathematiker kommunizieren und in der Mathematik aufgeschrieben wird, ist die Sprache der Beweis-Dokumente. Diese Sprache ist nicht immer eindeutig. Das Beweis-Dokument spiegelt in einer sehr komplizierten und kontextabhängigen Weise die lebendige Beweis-Arbeit des Beweisenden wider. Der Leser des Beweis-Dokumentes muss sich zu einer der Beweis-Arbeit des Beweisenden analogen gedanklichen Arbeit anregen lassen, wenn er das Evidenz-Erlebnis des Beweisenden teilen will. Das Beweis-Dokument gibt dem Leser keineswegs immer einen eindeutigen Weg vor. Es wird kein lückenloser Algorithmus vorgegeben. Das Beweis-Dokument gibt gedankliche Trittsteine, die in kongenialer Weise vom Leser erkannt und verbunden werden müssen. Beweis-Dokumente sind keine Computer-Programme, sie sind soziale Objekte. In Beweis-Dokumenten können Algorithmen auftreten, und nur in diesen Algorithmen sind Beweis-Dokumente vom Kontext der jeweiligen Gruppe, in der Mathematik produziert wird, unabhängig. Der Algorithmus bringt die Lösung eines Problems (z.B. 47 mit 11 zu multiplizieren) in einen festgelegten Ablauf, ist damit einem Computer-Programm gleich und lässt sich prinzipiell als

Computerprogramm schreiben. Damit wird das Problem operationalisiert. Mit der Auflösung in einem Algorithmus wird das ursprüngliche Problem vernichtet, indem die Problematik auf eine andere Ebene (z.B. der Bedienung von Rechenmaschinen u.Ä.) verlagert wird. Durch ein Beweis-Dokument wird ein Problem als eine in diesem Dokument „verdichtete" Lösungspraxis aufgehoben. Das Problem bleibt damit thematisch erhalten und der Nachvollzug der im Beweis-Dokument aufgehobenen lebendigen Beweis-Arbeit mit einem Evidenz-Erlebnis verbunden. Der Beweis verbindet ein Thema mit der Intention, Evidenz zu erzeugen.

Jeder Beweis enthält algorithmische Elemente. R's Beweis verweist auf die grundsätzliche Berechenbarkeit eines Verhältnisses von Zahlen. Y ist die Abstraktion von Prozessen, die auch Algorithmen sein können. (Hier: Divisionsalgorithmus zur Lösung von 6 : 4.) Aber er erschöpft sich nicht in den algorithmischen Prozessen. Der Beweisende ist sich mindestens des Problems bewusst, das Anlass zur Entwicklung eines Algorithmus war, und er sucht Evidenz in Bezug auf dieses Problem. Im schulischen Mathematikunterricht stehen die operationalen Algorithmen, die man ohne ein solches Nachdenken anwenden kann, im Vordergrund und die thematischen Beweise, die Gefühl und Verstand erfordern, im Hintergrund. Das macht Sinn nur dadurch, dass man algorithmische Fähigkeiten leichter überprüfen und benoten kann als thematische.

4. Unterricht als Verständigungs-Praxis

The lawn - der Rasen

Ich gebe den Schülern der 5. und 6. Klasse folgendes Problem:
Der Rasen
Ein reicher Mann wollte seinen Rasen mähen lassen, weil er am Abend ein großes Fest geben wollte. Der Rasen war sehr groß. Er rief bei einer Arbeitsvermittlung an, die ihm drei Männer schickte. Der erste wollte den Rasen in 6 Stunden mähen, der zweite in 4 Stunden und der dritte behauptete, er könne das Gras in 3 Stunden schneiden. Der Mann wollte den Rasen so schnell wie möglich geschnitten haben, also stellte er sie alle drei ein. Wie lange brauchen die drei Männer, um den Rasen zu schneiden?

Diesen Text hatte ich zusammen mit einer schematischen Skizze des Rasens auf einen Arbeitsbogen kopiert. (Siehe Bild 1).

Der Schüler S (12 Jahre) hatte die richtige Lösung (1:20 h) nach wenigen Minuten gefunden. Er nannte mir aber nur das Ergebnis. Wie üblich forderte ich ihn daher auf, seinen Lösungsweg darzustellen und zu begründen. Er ließ sich aber darauf nicht ein, sondern folgte einer neuen, eigenen Lösungsidee. Als Ergebnis dieser Arbeit überreichte er mir den mit vielen Zahlen beschriebenen Arbeitsbogen (Bild 1).[7] Dazu bemerkte er mit großer Genugtuung, er habe herausgefunden, dass die drei Männer den Rasen niemals fertig mähen können.

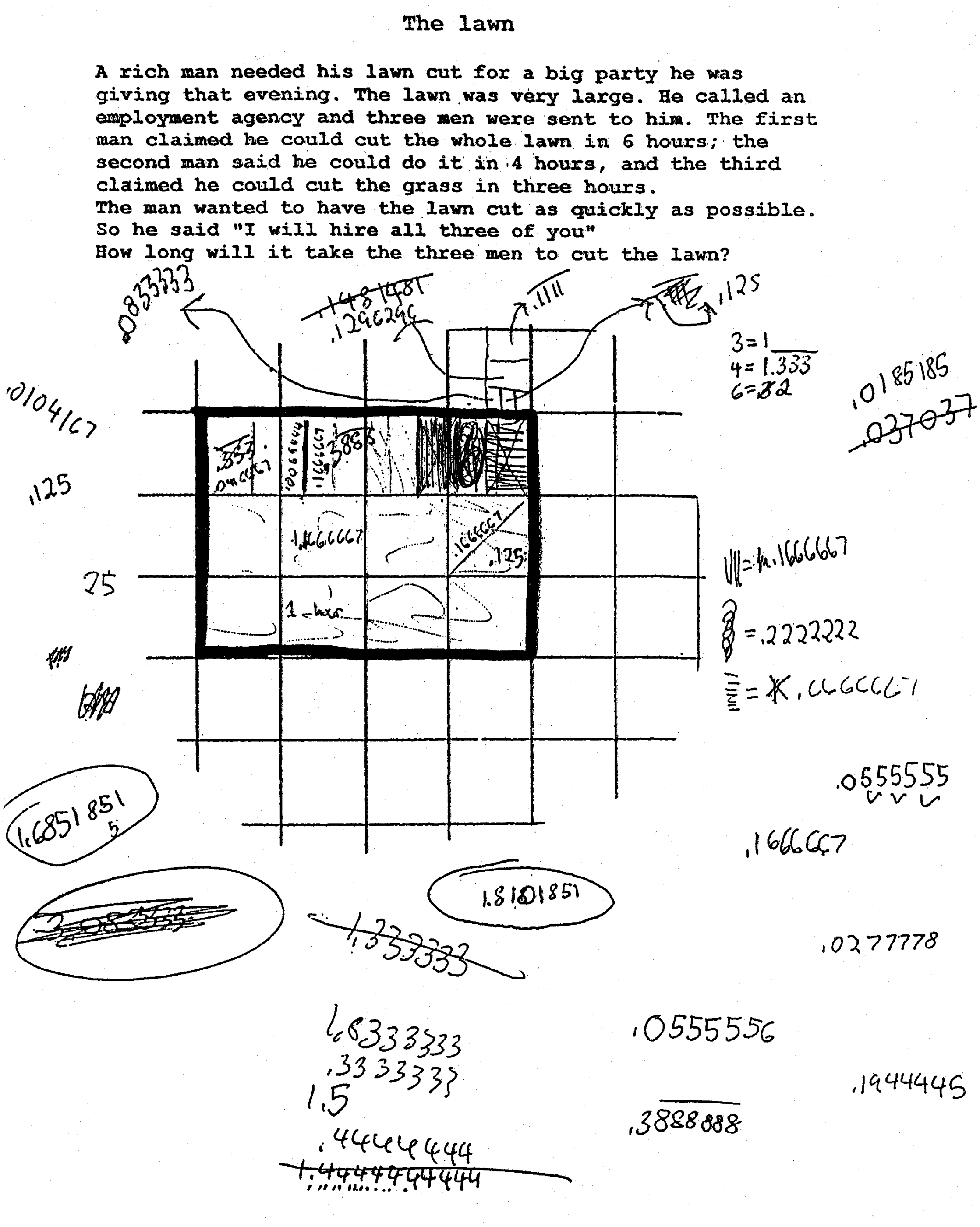

Bild 1

Auf den ersten Blick kann ich diesem Blatt nicht entnehmen, wie S auf diese Idee gekommen ist. Ich entnehme den Zahlen lediglich, dass er mit

[7] Dieses Blatt enthält das Original der Aufgabenstellung bestehend aus dem Aufgabentext und einem Raster mit Hervorhebung. Alle handschriftlichen Zeichen und Schraffuren sind von S hinzugefügt worden.

dem Taschenrechner gearbeitet hat, wobei er Brüche näherungsweise durch Dezimalzahlen ersetzte. Das Blatt dokumentiert weder eine Lösung des Problems noch einen Lösungsprozess. Aus der üblichen Sichtweise eines Mathematiklehrers liegt hier eine mangelhafte Schülerleistung vor. Was kann ich diesem Blatt jenseits der (bewertenden) Lehrersicht entnehmen? Zunächst unterstelle ich, dass hier die individuelle mathematische Praxis des Schülers Spuren hinterlassen hat, die ich (noch) nicht deuten kann. Ich vermute in den Zahlen und Zeichen einen mathematischen Sinn. Das macht mich neugierig, und ich will mehr über diese Praxis und deren Ergebnisse erfahren. Ich sage ihm also, dass ich den Zusammenhang der Zahlen und Zeichen auf seinem Blatt nicht verstehe und auch nicht erkennen kann, warum die Männer nie fertig werden. Zugleich zeige ich ihm, dass ich dieses Ergebnis sehr interessant finde und gerne verstehen würde, wie es zustande gekommen ist. S versucht daraufhin, mir seine Gedanken darzustellen. Doch dabei verheddert er sich. Er kann mir zwar das Prinzip umreißen, doch gerät er in Widersprüche. Auch die quantitativen Zusammenhänge bleiben unklar. Er merkt selbst, dass er sich mir nicht hinreichend verständlich machen kann. Ich schlage ihm vor, seine Gedanken aufzuschreiben. Das Schreiben (mit der Hand) ist ihm jedoch lästig. Er setzt sich daher in einem angrenzenden Raum an den Computer und verfasst den folgenden Text. (siehe Bild 2).[8]

Diesen Text kann man nicht während des Unterrichtes lesen. Ich analysiere ihn in Ruhe zu Hause und stelle dabei fest, dass erstens in Zeile 9 ein Rechenfehler auftritt (so dass alle folgenden Zahlen notwendig auch falsch sind), und dass S zweitens die Regel, nach der die Männer zusammenarbeiten, variiert und damit unklar bleibt, welcher Ablauf gemeint ist. Ich versuche, S dies in der folgenden Stunde in einem Gespräch deutlich zu machen. Er ist sehr erstaunt darüber, wie ernst ich seinen Text nehme. Ich schlage ihm vor, die Arbeitsorganisation der drei Männer

---

[8] Lieber Herr Präsident
Der Rasen
Ein reicher Mann ....stellte er alle drei ein. Wie lange brauchen die drei Männer, um den Rasen zu schneiden? Ich fand gleich heraus, dass die Antwort 1:20 Stunden ist (Im Original steht ”Minuten”, doch das ist nur ein Versehen, TB) , aber ich war damit nicht zufrieden, also fragte ich mich, was passiert, wenn der Mann, der für 1/3 des Rasens 1 Stunde braucht, wenn er fertig ist, zu dem zweiten Mann geht, der für 1/3 des Rasens 1,333... Stunden braucht, und diesem hilft. Und dann, wenn sie fertig sind, gehen sie beide und helfen dem dritten Mann, der für sein Drittel des Rasens 2 Stunden braucht ...... (Ich lasse die folgenden quantitativen Betrachtungen, die Fehler enthalten, aus, um nur das Prinzip zu verdeutlichen. TB) .... Dort teilen sie die verbleibende ungeschnittene Fläche in Drittel, der 1. Mann nimmt das erste, der 2. Mann bekommt das 2. ..... und der 3. Mann (das 3. TB) ...Dieser Prozess würde für immer weiter gehen mit der Tatsache, dass die Zeiten immer kürzer würden. Gezeichnet S.W.

Dear Mr. President

The Lawn

A rich man needed............"I will hire all three of you."
How long will it take the three men to cut the lawn?

I found that the answer ealy on was 1:20 minets but I wasn't satified so I said what happnes if the guy who can do 1\3 of the lawn in 1 hour goes to help the guy who can do 1\3 of the lawn in 1 .333... hours after hes done? And then when there done they both go and help the guy who can do the 1\3 of the lawn in 2 hours: The guy who can do his 3rd of the lawn in 1 hour goes and helpd the guy who can do his 3rd of the lawn in 1.333... hours so he has been working for 1 hour and only has .333... left with so they divide guy #2's 3rd into 4 sections. Guy #2 has done 3 of them each taking .333... of a hour they divied the 4th of the lawn into 2 parts 1 will be done by guy #1. The other will be done by guy #2. "After you do your half help guy #3 in his thierd don't help me help him," they say to each other. Guy #1 finishes his half in .125 hours and goes to help guy #3 with his 3rd. There they diviede the remaining uncut areas of the lawn into 3rds guy #1 takes the first, guy #2 will get the 2nd in.0416667 hours and guy #3 has done.5*. Guy #1 finishes his 3rd in .0416667 and helps guy #2 with his part. Guy #2 has finished 3\4ths of his lawn pat and has 1\4th left with so they divide guy #2's 3rd into 4 sections. Guy #2 has done 3 of them each taking .0017361 hours hey divied the 4th of the lawn into 2 parts 1 will be done by guy #1. The other will be done by guy #2. "After you do your half help guy #3 in his thierd don't help me help him," they say to each other. Guy #1 finishes his half in .0208334 hours and goes to help guy #3 with his 3rd. There they diviede the remaining uncut areas of the lawn into 3rds guy #1 takes the first, guy #2 will get the 2nd in .0034722 hours and guy #3 has done.5*...
This prossces would go on forever with the fact that the #s would get smaller.

S. W.

Bild 2

während eines Durchgangs möglichst übersichtlich darzustellen, ohne zunächst die Zeiten zu berechnen. Er macht sich diesmal gerne daran, zumal er wieder den Computer benutzen kann. Er hat die Idee, den Ablauf auf einem „spreadsheet" darzustellen. Das Ergebnis seiner Arbeit ist im folgenden dargestellt (Bild 3).

	A	B	C	D	E	F
1	*1. Guy 1 is finished. Guy 2 is 3/4 finished*					
2	*2. Guy 1 went to help guy 2 they split the lawn and will not*					
3	*go off onto the others side Guy 1 finishes and goes to help guy 3*					
4	*with the remaining half his lawn. Guy 2 finishes. By now all*					
5	*workers are on guy #3's 3rd of the lawn and they have split*					
6	*3's lawn into 3 3rds each one finishes a 3rd and goes to help the*					
7	*next guy in # order (1 goes to 2 and then 3) ....Repeat*					
8	*step 1 + 2*					

Bild 3

Damit ist die Arbeitsorganisation klar dargestellt. Es fehlt nun „nur noch" die konkrete Berechnung der Zeiten für den ersten und alle folgenden Durchgänge. Um die benötigte Zeit zu berechnen, muss eine unendliche Summe von immer kürzer werdenden Zeiten bestimmt werden. Das setzt Methoden voraus, die Schülern erst in der 11. Klasse zur Verfügung stehen. Ich versuche gar nicht erst, S zu einer weiteren quantitativen Behandlung des Problems zu ermuntern. Er denkt auch, dass er die Arbeit an dem Problem nun zu einem sinnvollen Abschluss gebracht hat, und möchte sich anderen Fragen zuwenden. Gelegentlich werde ich ihm die Geschichte von Achill und der Schildkröte erzählen, in der „bewiesen" wird, dass Achill die Schildkröte in einem Wettlauf nie einholen kann.

Zusammenfassung und Kommentar

Die drei Blätter dokumentieren drei Schritte in einem Schüler-Lehrer-Diskurs, der zum Gegenstand die Diskursfähigkeit der mathematischen Praxis eben dieses Schülers hat. Lehrer und Schüler treten dazu in eine gemeinsame mathematische Praxis ein, deren Thema durch den Schüler bestimmt wird. Bemerkenswert ist, dass sich S mit seiner ersten, richtigen Lösung nicht zufrieden gibt. Das wird verständlich, wenn man sieht, wie S versucht, die benötigte Zeit für das Rasenmähen als Ergebnis eines konkret ablaufenden Arbeitsprozesses zu verstehen. Bei der ersten Lösung (1:20 h), die von mir gemeint war, wird nicht mitgedacht, wie diese Zeit konkret realisiert werden kann. Hieran erkennt man, dass die Aufgabe nur dem Anschein nach eine Anwendungsaufgabe ist, die sich auf eine reale Situation bezieht. Bei genauem Hinsehen muss man feststellen, dass die drei Männer die Zeit von 1:20 Stunden sicher nicht erreichen können. (Mit Sicherheit wird noch Zeit für das Wechseln auf andere Rasenstücke gebraucht.) S deckt dies auf. Indem er die Aufgabe als reales Problem sieht, wird er zu der (nur anscheinend) absurden Feststellung gebracht, dass die drei Arbeiter niemals fertig werden. Er entdeckt dabei das Problem der Summe einer unendlichen Reihe, das zu den tieferliegenden Problemen der modernen Mathematik gehört.

5. Erste Folgerungen

Die mit „Lehren" verbundene Praxis von Schülern und Lehrern tritt zurück zugunsten einer gemeinsamen mathematischen Arbeits-Praxis. Der Lehrer lehrt nicht mehr. Er unterstützt selbstorganisierte mathematische Praxen der Gruppe oder einzelner Schüler, und er nimmt an dieser Praxis als Experte teil.

Mathematische Fragestellungen sind nur dem Augenschein nach von der alltäglichen Praxis abgehoben. Oft entdecken Schüler einen vom Lehrer nicht erwarteten Bezug zu ihrer Realität. Dagegen sind die sogenannten Anwendungen der Mathematik, wie sie z.B. in Textaufgaben angeboten werden, häufig so in Hinblick auf bestimmte Lösungsverfahren konstruiert, dass sie keinen Realitätsbezug haben. Die Beschäftigung mit mathematischen Fragen um ihrer selbst willen rückt in den Vordergrund. Diese Beschäftigung ist nötig, um Anwendungen verstehen zu können. Ziel mathematischer Praxis ist es, zu selbst gewählten Themen Hypothesen aufzustellen, zu Aussagen zu kommen und diese Aussagen zu begründen. Die Stichhaltigkeit der Begründungen erweist sich in einem Evidenz-Erlebnis, das jeder mit der Gruppe teilen kann. Arithmetik anzuwenden ist nicht damit gleichzusetzen, mathematisch zu arbeiten. Doch liefert die Arithmetik wichtige Verfahren, um Evidenz herzustellen. Daher muss Arithmetik selbst auf eine mathematische Weise entwickelt werden. Der Lehrer ist ein Mathematiker unter anderen. Er ist in der Gruppe ein Meister seines Faches, aber er ist nicht allwissend. Vor allem: Sein Wissen muss überprüfbar sein. Mathematik wird in der sozialen Gruppe, die aus Lehrer(n) und Schüler(n) besteht, produziert. Die soziale Gruppe braucht nicht und sollte nicht homogenisiert werden. Es widerspricht dem Selbst-Entwicklungs-Konzept der Gruppe, wenn sie zu stark homogenisiert wird.

Schlusswort

Michael Butler sagt: „Die Mathematik ist eine Frucht. Wir schälen die Frucht und füttern die Schüler mit der Schale.“

Literatur

Baruk, S. (1989). Wie alt ist der Kapitän? Basel: Birkhäuser Verlag

Gallin, P., Ruf, U. (1990). Sprache und Mathematik in der Schule. Zürich: Verlag LCH.

Holzkamp, K. (1993). Lernen. Subjektwissenschaftliche Grundlegung. Frankfurt/M: Campus Verlag.

Lave, J. (1988). Cognition in Practice. Mind, mathematics and culture in everyday live. Cambridge UK: Cambridge University Press.

Livingston, E. (1987). Making sense of Ethnomethodology. New York: Routledge & Kegan Paul Inc.