Gisela Ulmann

Mathematik-Didaktik und psychologische Theorien

1. *Mathematische Begabung – oder schulische Behinderung? Berührungspunkte von Psychologie und (Schul-)Mathematik*

Seit es Schulen gibt, ist es nie gelungen, allen Schülern Rechnen beizubringen; daß es immer »Versager« gab – und daß es auch immer solche gab, die »Erfindungen«[1] machten, scheint dafür zu sprechen, daß »Mathematik« irgendwie zu den angeborenen »Begabungen« gehört – wie »Musik« oder »Malen«.

Die Pädagogen haben seit Bestehen der Schule den diesbezüglichen Unterricht (früher wurde er Rechnen genannt, seit einigen Jahrzehnten heißt er »Mathematik«) verbessert, immer wieder gezeigt, daß mit den vorherigen Methoden dieser Gegenstand gar nicht zu begreifen war – und erfahren, daß auch mit den jeweils neuen Methoden wieder Könner und »Versager« herauskamen, wobei sich die Anzahl der »Könner« nicht einmal vermehrte.

Die Psychologen haben Rechenfähigkeit zunächst zur Diagnose im Sinne einer Prognose benutzt: Seit sie versuchten, Intelligenz (als etwas angeborenes!) zu messen, gehör(t)en Rechenaufgaben zum Repertoire; mathematische Strukturen erkennen und mathematische Operationen ausführen zu können wurde sogar zum härtesten Kern, dem »kulturfrei« abprüfbaren Aspekt, von Intelligenz (vgl. den RAVEN).

Als Psychologen anfingen zu therapieren, kümmerten sie sich in anderer Weise um Schulschwierigkeiten: sie sollten diagnostiziert werden um sie zu beheben. Während (Un-)Fähigkeiten bezüglich des Lesens und der Rechtschreibung rasch als »zu therapierende« entdeckt wurden[2], wurde Versagen im Schulfach Mathematik bis vor relativ kurzer Zeit eben als »geistig behindert« eingestuft, an eine »Therapierbarkeit« wurde nicht gedacht. Im Gegenteil: gerade der Unterschied zwischen mindestens ausreichenden Fähigkeiten im Rechnen und nicht ausreichenden Fähigkeiten im Lesen und Schreiben galt als Kriterium für Legasthenie im Gegensatz zu »geistig behindert«. Neuerdings, ironischerweise gerade zu einem Zeitpunkt, wo die Legasthenie als nicht-existent betrachtet wird, wurde die »Arithmasthenie« »entdeckt« (vgl. z.B. Schöniger 1989), manche tauften dies Phänomen auch »Dyskalkulie«. Rechenschwäche oder Rechenunfähigkeit gilt nun ebenfalls als therapiebedürftig und therapierbar.

---

1 Adam Riese, Carl Friedrich Gauß.

2 Wie Russ in seiner Dissertation (1990) ausführlich darstellt, existiert die ca. 1965 entdeckte »Legasthenie« inzwischen nicht mehr.

Es gibt noch eine dritte Beziehung zwischen Psychologie und Mathematik in der Schule: Mathematik-Didaktiker haben durchaus versucht, sich an einschlägigen »Erkenntnissen« der Psychologie zu orientieren. Als großer Neuerer in der Mathematik-Didaktik der 20er Jahre gilt Wittmann, der dem Ansatz der Gestaltpsychologie verpflichtet war – und in den 50er Jahren wurden von Resag die Untersuchungen zur Entwicklung des Zahlbegriffs von Piaget (1941) entdeckt. Brachte die Gestaltpsychologie einen neuen Begriff von »Einsicht« (als ein-*sehen*), so ließ sich aus Piagets Untersuchungen ersehen, wie ein Kind den Zahlbegriff entwickelt – und es wurde versucht, aus Piagets Ergebnissen bezüglich des *Lernens* von Kindern *Lehrmethoden* abzuleiten.

Nicht-Psychologen nennen dies Phänomen der »Rechenschwäche« anders: Baruk (1989) spricht vom »Automath«, der in der Lage ist, aus der Länge eines Schiffs und dessen Belastung das Alter des Kapitäns auszurechnen: er zählt die beiden Zahlen einfach wie ein »Automat« zusammen. Papert (1985) spricht vom »Mathophoben«, der nicht nur Angst vor Mathematik hat, sondern vorm Lernen schlechthin (math = griech. Lernen). Diese Begriffe beziehen sich nicht auf Fähigkeiten – sondern auf etwas *Erzeugtes*, also nicht auf »Un-Begabung« – sondern auf Gelerntes. Zugespitzt: Nicht rechnen zu können bzw. Unsinn zu rechnen, nicht Mathematik zu können, sogar Angst davor und vorm Lernen schlechthin zu haben, wird in den Schulen *gelernt*.

Während Papert mit seiner Kritik eine »neue Methode« für den Mathematik-Unterricht entwickelt bzw. ein neues Medium dafür propagiert (den Computer sowie eine Computersprache für Kinder), gehört Baruk eher zum Kreis der sonst schweigsamen: der Nachhilfelehrer. Sie beschäftigt sich mit jenen, die in der Schule etwas hätten lernen sollen, aber nicht gelernt haben – und lehrt es sie.

Eine Zusammenarbeit von Mathematik-Didaktikern bzw. -Lehrern und Nachhilfelehrern scheint es nicht zu geben. Dies Phänomen ist nicht nur deswegen interessant, weil in den Didaktikbüchern die jeweils neuesten allgemeinen Erkenntnisse propagiert werden, während man in den Schriften der Nachhilfelehrer eher Polemik gegen diesen modischen Schnickschnack findet, sondern vor allem weil die Herangehensweise so verschieden ist. Während die »Lehrer« allenfalls versprechen, daß mit ihrer Methode ein größerer Teil aller Schüler die jeweiligen Lernziele erreichen könnten, hat es der Nachhilfelehrer mit einem einzelnen Schüler zu tun, bei dem er sich einen Mißerfolg nicht leisten kann; ihm kann es deshalb nicht darum gehen, wie Schüler »im allgemeinen« lernen, sondern welche Schwierigkeiten dieser ihr Schüler hat. Deshalb ist das Bemühen der Nachhilfelehrer nicht so sehr auf das Lehren gerichtet, sondern darauf, Behinderungen des Lernens aufzuheben.

Solange diese Schwierigkeiten aber individualisiert werden, als je individuelle Probleme betrachtet werden, kann deren Erkenntnis nicht fruchtbar für die allgemeine Mathematikdidaktik sein. Insofern scheint eine Zusammenarbeit zwischen Didaktikern und Nachhilfelehrern nicht lohnend – und insofern ist zu vermuten, daß es auch zu keiner Zusammenarbeit von Mathematik-Didaktikern und Arithmasthenie- bzw. Dyscalculie-Therapeuten kommen wird. Der Unterricht wird als »richtig« angesehen – nur die je einzelnen Schüler sind irgendwie »falsch«.[3]

Andererseits hat Piaget seine Theorie der ontogenetischen Entwicklung des Zahlbegriffs auch aus *Fehlern* im kindlichen Denken hergeleitet. Daß diese von Mathematik-Didaktikern rezipiert wurde, liegt vermutlich daran, daß Piaget eben aus dem Verschwinden von Fehlern ein *positives Konzept* der Entwicklung abgeleitet hat.

Gesellschaftlich gesehen stehen wir heute vor einer paradoxen Situation: Einerseits werden die Lehrpläne für den Mathematik-Unterricht ständig revolutioniert bzw. revidiert, in jedem Fall modernisiert – andererseits wird die Zahl der Versager eher größer. Der Staat reagiert darauf mit vermehrter »Einzel-Nachhilfe« in Form von staatlich finanzierter »Schularbeitshilfe«, »Einzelfallhilfe«, »Therapie« – und »Brückenkursen« an den Universitäten –, nicht aber mit besserer Qualifizierung jener Lehrer, die dies Fach später an den Schulen unterrichten.[4]

Aber die Frage ist nicht nur, wieviele Mathematik-Versager sich ein Staat leisten kann, sondern auch, welch gravierende persönliche Kränkungen erzeugt werden. Die Tatsache, »schon in der 1. Klasse!« oder »schon bei der Bruchrechnung« »versagt« zu haben, kann für den »Versager« bedeuten, sich lebenslänglich auf der geistigen Stufe eines 6jährigen (oder 10jährigen) befindlich zu fühlen, eine Kränkung, die nur aufgehoben werden kann, wenn man die Addition oder die Bruchrechnung endlich begreift (vgl. Baruk 1989). Sicher wäre es menschlicher, derartige Kränkungen nicht erst zu erzeugen.

Ob dies möglich ist, hängt jedoch entscheidend davon ab, ob man sich endlich entschließt, mathematische Fähigkeiten nicht als »Begabung« zu betrachten, sondern als Lernergebnisse – die nichts weiter voraussetzen als eine genetische Ausstattung wie sie den Menschen zukommt – und Gründe des einzelnen, Mathematik zu lernen, sowie eine Lehrmethode, die den Lernprozess nicht behindert sondern ermöglicht. Wenn man sich klar macht, daß Menschen die Mathematik gesellschaftlich-historisch betrachtet erst relativ spät entwickelt haben, ist auch klar, daß es sich hier nicht um eine den Menschen angeborene

---

3 Dies scheint besonders absurd angesichts der Ergebnisse von Baruk: bis zu 90 % der geprüften Schüler erwiesen sich als »Automathen«. Versagen in Mathematik ist also kein Problem einiger weniger Schüler – auch wenn es nicht bei allen Schülern im Schulunterricht auffällt!

4 In Berlin wird Mathematik an den Grundschulen überwiegend »fachfremd« unterrichtet, d.h. die meisten Lehrer haben keine mathematische bzw. mathematik- didaktische Ausbildung.

Fähigkeit handeln kann. Wäre sie das, wäre sie auch bei den Urmenschen schon »ausgereift«.

Gesellschaftliche Fortschritte in der Mathematik wurden auch nicht durch Ausmendeln dieser Fähigkeit in »Mathematikerfamilien« erreicht, sondern durch allgemeine Vereinfachungen. Nicht die Familie Bernoulli hat den entscheidenden Fortschritt in der Mathematik erbracht, eher z.B. der Übergang von der Schreibweise in römischen Ziffern zur Schreibweise in arabischen Ziffern.

Im folgenden kann es jedoch nicht darum gehen, »die Methode« darzustellen, nach der *alle* Kinder in der Schule »garantiert erfolgreich« Mathematik lernen, sondern zum einen darum, falsche Rezeptionen »psychologischer Erkenntnisse« durch Mathematikdidaktiker aufzuweisen und soweit möglich richtig zu stellen – und zum anderen darum, auf entwicklungspsychologischer Grundlage Überlegungen, Forschungsfragen und Hypothesen zu einer mathematikdidaktischen Konzeption anzustellen.

Dabei steht man jedoch vor der Schwierigkeit, daß es nicht »die« Mathematik-Didaktik gibt, sondern sowohl historisch als auch gegenwärtig eine Vielzahl von verschiedenen, meist von kommerziellen Verlagen erstellten und von den Schulbehörden nur »genehmigten« Lehrbüchern, Arbeitsmaterialien etc. Dazu kommen kaum zählbare Mengen von Diskussionsbeiträgen, Vorschlägen für einzelne »didaktische Einheiten« etc.

Um also den zu betrachtenden Bereich einzugrenzen, beziehe ich mich

- auf den Anfangsunterricht, weil hier die Grundlage (u.U. der Verwirrung) gelegt wird,
- dabei historisch auf jene Ansätze, die auch in der Mathematik-Didaktik als bedeutende Neuerungen gesehen werden
- und schließlich ganz konkret auf die neueste Fassung des Berliner (immer vorläufigen) Lehrplans für das 1. Schuljahr, die vom Berliner Senator für Schulwesen herausgegebenen und diesem Lehrplan entsprechenden Mathematik-Arbeitsbögen (Arbeits-Diagnose-Förderbögen, »ADF«; Panknin u. Mitarbeiter, 1985), sowie den dazugehörigen »Kommentar« (für die Hand des Lehrers).

2. *Vom Rechenunterricht zum »logischen Denken«: Mathematik*

Möglicherweise ist es ungerechtfertigt, Rechenunterricht und Mathematik-Didaktik in einem Atemzug zu nennen. Haben sie überhaupt den gleichen Gegenstand? Während es bis in die 60er Jahre klar war, daß der Gegenstand des Anfangsunterrichts in diesem Fach Arithmetik war, war er anschließend »logisches Denken« (s.u.), das Fach wurde von »Rechnen« in »Mathematik« umbenannt. Obwohl seit einigen Jahren wieder (überwiegend?) Arithmetik gelernt werden soll, behielt das Schulfach seine Bezeichnung »Mathematik« bei. Nun mag es gleichgültig sein, wie das Fach genannt wird – aber zweierlei soll hier schon angemerkt werden:

Ein Schulanfänger kennt wohl das Wort »rechnen« – wenn er auch u.U. nicht versteht, was es bedeutet, wenn die Eltern sagen »wir müssen rechnen« oder »das rechnet sich nicht« etc., so weiß er wohl, daß man da irgendwas mit *Zahlen tut.* Das Wort »Mathematik« kennt er nicht, und er weiß auch nicht, wie man »das macht«, man kann schließlich nicht »mathematiken« oder so. Dies Wort steht also beziehungslos *neben* dem, was er bisher erfahren hat, knüpft an nichts an. Möglicherweise war dies intendiert zur Zeit, als wirklich nicht Rechnen sondern logisches Denken gelehrt werden sollte, als also 2 Schuljahre lang Mengenlehre gelehrt wurde – und erst in der dritten Klasse Zahlen vorkamen. Aus »Tradition« müssen Schüler noch heute darauf verzichten, eine Bezeichnung für etwas, was sie tun sollen, zu bekommen, die sie verstehen würden.

Zum zweiten: sofern auch heute noch Mathematik gelehrt werden sollte, wäre es zumindest merkwürdig, die Unfähigkeit, dies zu lernen, mit »Arithmasthenie« oder »Dyskalkulie« zu bezeichnen.

Wie auch immer der Unterrichts-Gegenstand nun benannt wird, auf jeden Fall sollen auf irgendeine Weise zunächst letztlich die Zahlen (bzw. der Zahlbegriff) und die Grundrechenarten gelehrt werden. Unterschiede bestehen jedoch in der Frage nach dem »wie?« – und der Reihenfolge.

2.1. *Wittmanns Ganzheitsmethode*

Der Pädagoge und (Gestalt-)Psychologe Wittmann[5] blickte auf folgenden Methodenstreit zurück: gewinnt man den Zahlbegriff durch die *Anschauung* oder durch das *Zählen*? Falls man ihn durch die Anschauung gewinnt – ist es nützlicher, diesen »synthetisch« aufzubauen (also zuerst alle Zahlen von 1 bis 10 aus entsprechenden Anzahl-Bildern zu abstrahieren und erst dann mit den Rechenoperationen zu beginnen) oder ihn »monographisch« aufzubauen (also zuerst die 1 einzuführen, dann die 2, und ab dann jeweils alle möglichen Rechenoperationen damit zu bilden). (Vgl. hierzu Odenbach 1964)

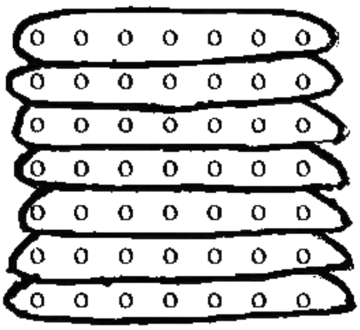
Da das Denken für Gestaltpsychologen im Sehen sich abspielt (»Einsehen«), entschied Wittmann sich klar für die Anschauungsmethode (obwohl er sich vom »alten« Anschauungsbegriff distanziert). Zahlen sind demnach auch

5 Wittmann entwickelte seine Methode 1929, sein Buch erschien in der zweiten Auflage 1937 und wurde, nachdem es lange Zeit vergriffen war, 1958 wieder aufgelegt – für Interessenten. Seine Ganzheitsmethode bezieht sich auf den ganzen (ganzheitlichen) Unterricht. Bekannt geworden und systematisch durchgesetzt hatte sich eher die ganzheitliche Lesemethode, nach der zunächst ganze Wörter zu lesen gelehrt wurden und dann erst als »Analyse« die Buchstaben. Ganzheitlicher Rechenunterricht bedeutet zu allererst, die Zahlen als »Ganzheiten« zu definieren. Dieser Aspekt findet sich auch heute noch – sozusagen als »Trümmerstück« – in der Mathematikdidaktik.

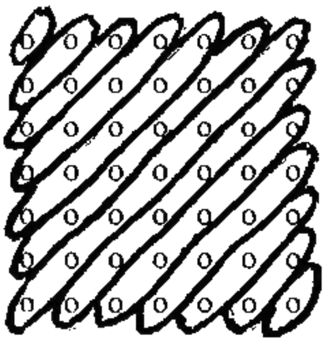
»anschauliche Gebilde«, die als Ganzheiten aufgefaßt und dann verinnerlicht werden. Damit Zahlen anschaulich sind, müssen sie veranschaulicht werden. Sicher kommen derartige Gebilde im realen Leben auch vor, werden dort mit den Kindern auch beobachtet – damit sie aber wirklich gut »sichtbar« sind, ist es besser, sie herzustellen (mit Plättchen und mit gezeichneten Kringeln). Indem man diese Kringelfelder aufgliedert, ergeben sich Operationen wie aufteilen, verteilen, malnehmen, hinzufügen, wegnehmen. »Aufteilen« und »verteilen« sind zunächst verschiedene Operationen, die auch verschieden symbolisiert werden (mit Pluszeichen, Doppelpunkt bzw. Dreierpunkt); sie werden als elementarste Operation verstanden[6].

Wenn man mit dem Aufteilen anfängt, ist es sinnvoll, mit der kleinsten aufteilbaren Einheit anzufangen: mit dem Paar. Dies kann man auch »Zweier« nennen, dies ist zunächst nichts als ein Name. Die Mengen werden dann in folgender Reihenfolge gelehrt: der Doppelzweier (als Verdopplung des Paares), der Einer (als aufgeteiltes Paar), der Dreier (Paar und einer), der Doppeldreier – der Fünfer, der Doppelvierer, der Doppelfünfer – der Siebener und der Neuner. Erst wenn die Kinder diese Konfigurationen sicher identifizieren können, dürfen sie die Zahlworte (z.B. »sechs« statt »Doppeldreier«) benutzen bzw. werden diese gelehrt. Schließlich werden auch die Zahlsymbole gelehrt.

Die Operationen selbst werden nun ebenfalls »anschaulich« durchgeführt. Dies sieht in der Regel so aus, daß die Schüler Felder mit Kringeln vorgelegt bekommen oder selbst herstellen, und dann »abenteuern«, d.h. diese nach bestimmten ästhetischen oder sonstigen, auch selbst erfundenen Richtlinien »einkreisen«. Diese Felder mit eingekreisten Kringeln werden dann quasi abgeschrieben – wobei es jedoch darauf ankommt, die anschaulichen Beziehungen mit dem »richtigen« Zeichen zu versehen. Dabei kommen die Kinder – wie Wittmann per Faksimile glaubhaft macht – zu erstaunlichen Leistungen. Sie schreiben z.B. schon zu Ende des 1. Schuljahres folgendes (ab):



49=7x7 49:7=7



49= 1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1

6 Aufteilen, wenn man so will die »Division«, wird also in der Didaktik als elementarer betrachtet als das Zusammen-zählen, also die Addition, die in der wissenschaftlichen Mathematik immer noch als elementarste Operation betrachtet und entsprechend begründet wird.

Die einzige Voraussetzung dafür ist freilich, daß ein Kind 7mal7er Kringelfelder und einen Bleistift hat – und die Ergebnisse seiner Einkreisungen abschreibt. Legt es z.B. lauter diagonale Felder in diesem Feld an, ergibt sich obige »+Schreibweise«, legt es vertikale oder horizontale Felder an, ergeben sich die beiden anderen Schreibweisen (»Male« zu siebenen – oder verteilt auf sieben »Male«). Die Definition des Rechnens lautet demgemäß auch: »Rechnen ist Ordnen von Mengen mit Hilfe der in Symbolen und auf Mengenanschauungen gegründeten Zahlbegriffe und Operationen« (z.B. Wittmann, 1958, S. 118).

Entsprechend werden dann auch »Zahlgeschichten« erzählt (nicht Zahlaufgaben gerechnet). Zahlgeschichten unterscheiden sich von Zahlaufgaben dadurch, daß es sozusagen keine unbekannte gibt, also nichts zu rechnen ist. Dies ist in der gestaltpsychologisch konzipierten Methode konsequent: es liegt ja sozusagen alles sichtbar vor einem, man braucht es nur »abzulesen«.

Immer wieder warnt Wittmann vor jeglicher Systematik und vor dem Lernen von Fertigkeiten. Die Operationen müssen flexibel sein und statt Fertigkeiten zu erwerben sollen die Kinder denken (was eben einsehen bedeutet).

Die Reihenfolge der vermittelten und evtl. auch gelernten Operationen (dividieren, multiplizieren, addieren, subtrahieren) sowie die Reihenfolge der eingeführten Zahlen (2,4,1,3,6,5,8,10,7,9) sind bei Wittmann in seiner Auffassung des Denkens als Anschauung begründet, sie haben gewissermaßen Sinn. Auch das Vermeiden von einfachem Auswendiglernen oder mechanischem Anwenden irgendwelcher unbegriffenen Operationen ist sicher ein Fortschritt gegenüber dem vorherigen Rechendrill. – Der Fehler liegt allerdings in der Auffassung des Denkens schlechthin als *anschauliches* Denken.

2.2. *Piagets Untersuchung zur Entwicklung des Zahlbegriffs und Piaget-Rezeption durch Resag*

Die Frage, die der Erkenntnistheoretiker Piaget[7] als psychologische verfolgte, lautet: wie entwickelt sich der Zahlbegriff beim Kinde? Das Vorhandensein des Zahlbegriffs macht Piaget von drei Kriterien abhängig: ein Kind muß begriffen haben, daß die Anzahl einer Menge von Elementen unabhängig von ihrer Anordnung ist; ein Kind muß die Klasseneinschachtelung ($A + A' = B$; $B + B' = C$; $C + C' = D$ etc.) begriffen haben; ein Kind muß asymmetrische Serien bilden können, also auch wissen, daß wenn $A < B < C$, dann $A < C$ ist. Diese beiden letzten Punkte zusammengenommen bedeuten für die Zahl, daß die »Klassen« A', B', C' etc. genau eins sind, insofern um genau eins größer als

7 Piaget schrieb seine Abhandlung zur Entwicklung des Zahlbegriffs 1941, sie wurde jedoch erst in den 60er Jahren ins Deutsche übersetzt und kurz vorher im deutschsprachigen Raum von Resag für die Mathematik-Didaktik entdeckt. Seitdem gibt es zahlreiche »Rezeptionen« und verschiedenste Deutungen. Im folgenden gebe ich meine Version wieder.

A, B, und C etc. sind, bzw. daß der *Abstand* zwischen zwei aufeinanderfolgenden Klassen (bzw. Zahlen) immer gleich groß, und zwar genau *+1* ist.

Um die Invarianz zu *prüfen*, konfrontiert Piaget Kinder mit folgender Anordnung: er stellte mit dem zu prüfenden Kind zwei gleichgroße Mengen her (Wasser in Gläsern; oder per Stück-zu-Stück-Zuordnung: jeder Eierbecher bekommt ein Ei, für jeden Groschen wird ein Bonbon eingetauscht, in jede Vase kommt eine Blume). Ist die Angelegenheit klar und bestätigt das Kind die Gleichheit der beiden Mengen, verändert Piaget die Anordnung einer Menge: das Wasser wird in ein Glas von anderer Form gegossen, die Blumen werden auf einen Haufen gelegt, die Geldstücke weiter auseinandergerückt etc. Behauptet das Kind jetzt, es gäbe in einem Glas mehr Wasser als im anderen, es gäbe jetzt weniger Blumen als Vasen oder mehr Groschen als Bonbons, so hat es die Invarianz der Anzahl nicht begriffen.

Um die Klasseninklusion zu *prüfen*, ließ Piaget das Kind eine Menge von Holzperlen (8) sowie ihre Untermengen, braune (6) und weiße (2) zählen und beschreiben. Dann fragte er, ob es mehr braune oder mehr Holzperlen gibt (bzw. welche Kette länger würde; weiterhin fragt er z.B. auch, ob in der Klasse des Kindes mehr Kinder oder mehr Mädchen wären etc.), bat also das Kind, jeweils die Obermenge mit einer Untermenge zu vergleichen. Wenn das Kind behauptet, es gäbe mehr braune Holzperlen als Holzperlen, es gäbe mehr Mädchen als Kinder in seiner Klasse, so kann es die Obermenge nicht gleichzeitig mit den Untermengen denken und insofern nicht vergleichen – also Klasseninklusion noch nicht denken.

Das Verständnis der »additiven Komposition« *prüfte* Piaget mit einer in eine Geschichte eingebetteten Frage: wenn ein Kind seine 8 Bonbonbs zu je vieren ißt – und ein anderes Kind von seinen 8 Bonbons am Vormittag 7, am Nachmittag 1 ißt – haben dann beide gleich viele Bonbons gegessen? Wieder werden so zwei Mengen vor dem Kind ausgebreitet, und die additive Komposition ist verstanden, wenn ein Kind antwortet, daß »die von da« jetzt »hier« liegen und insofern beide Kinder gleich viele Bonbons hätten. Es weiß dann also, daß das, was unterschiedlich aussieht, sich »ausgleicht«.

o o	o o	gleich, mehr oder weniger als	o o o o	o
o o	o o		o o o	

Auch Kinder, die diese Aufgaben nicht richtig lösen, wissen, wie Piaget immer wieder betont, daß man beim Umgießen oder Umlegen nichts weggenommen und nichts dazu getan hat (Identität), daß man den Vorgang umkehren kann und die Mengen dann wieder »gleich« wären (Reversibilität), und daß das, was »hier übersteht«, »dort fehlt« (Kompensation). Aber erst, wenn diese drei Argumente gleichzeitig gedacht werden können, und die Klasseninklusion begriffen ist, sind die logischen Grundlagen für den Zahlbegriff ausgebildet. Dieser setzt darüber hinaus noch voraus, daß die »homogene Einheit 1« sowie die Iteration

(1+1=2; 2+1=3; 3+1=4 etc.) vom Kind konstruiert wird. – Vermutlich aus drucktechnischen Gründen schreibt Piaget, daß es jetzt verstanden hat, daß 4+4=1+7 ist. Damit ist keineswegs gesagt, daß dies Kind die *Operation des Addierens* beherrschte oder gar verstünde, was eine mathematische Gleichung ist. Im Gegenteil, Piaget sagt an anderer Stelle (1972) ausdrücklich, daß es das Prinzip der mathematischen Gleichung erst viel später versteht. Alle seine Experimente zum Zahlbegriff sind ja so aufgebaut, daß die Gleicheit der Mengen feststeht – und würde das Kind versuchen, sie empririsch zu ermitteln, also durch Zählen oder Rechnen, würde es zeigen, daß es die anzahlmäßige Unverändertheit eben nicht verstanden hat. Zur Entwicklung *arithmetischer Operationen* hat Piaget nicht geforscht, er selbst verweist immer wieder darauf, daß die Lehrerinnen, mit denen er zusammenarbeitet, ihre diesbezüglichen Erkenntnisse veröffentlichen würden.

Piagets Experimente sind »Feststellungsexperimente«, Prüfexperimente, d.h. sie lassen Schlüsse darüber zu, was ein Kind kann bzw. nicht kann – nicht aber darüber, wie es dies lernt bzw. »entwickelt«. Allerdings bildet Piaget aus den verschiedenen Antworten der Kinder Stufen und erschließt aus diesen Stufen die Entwicklung des Zahlbegriffs (nicht des kindlichen Denkens!). Es ist hier nicht der Ort, diese Stufen und deren Erklimmen weiter zu diskutieren; es spricht einiges dafür, daß Piaget annahm, daß die zunächst nur eindimensionale Handlung des Kindes dadurch, daß das Kind mit Mengen manipuliert, seine Handlungen umkehrt, zur reversiblen und verinnerlichten Operation würde, die grundsätzliche Umkehrbarkeit sowie Kompensation gedacht werden kann sowie das gleichzeitige Denken von Obermengen und Untermengen möglich wird. Dies geschieht nach Piaget »spontan«, was bedeutet, daß es nicht »übermittelt« wird, daß ein Kind *selbst* Antworten auf Fragen findet, die es sich *selbst* gestellt hat. Hier liegt in der Rezeption sicher ein Fehler vor, wenn angenommen wird, daß Prüfsituationen auch als didaktische Situationen genutzt werden können.

Es spricht weiterhin einiges dafür, daß bei den Rezeptionen dieser Untersuchungen von Piaget irrigerweise angenommen wurde, daß mit dem Begreifen der »additiven Komposition« sowie der »multiplikativen Komposition«, die »operatorisch«, also verinnerlicht und so reversibel wird, auch die *Operationen* des Addierens und Multiplizierens sowie deren »Umkehrung«, die Subtraktion und die Division, erworben würden, so daß diese nicht extra gelehrt werden müßten. Anders ausgedrückt: Man nimmt scheinbar an, daß ein Kind, wenn es die Gleichheit von 2 (oder 3) Mengen, die (vor seinen Augen) in unterschiedliche Teilmengen zerlegt werden, »zugibt«, auch weiß, wie man Teilmengen zueinander addiert oder miteinander multipliziert (und ebenso subtrahieren und dividieren kann).

Resag, der Piagets Theorie für die Mathematik-Didaktik entdeckte, bezeichnet Wittmanns Methode als »Umwälzung«, die jedoch mit Gewinn durch Piagets

Erkenntnisse zu erweitern wären.[8] Die »Anschauung« muß um das Handeln erweitert werden – und zwar insbesondere um die Umkehrung der Handlungen. Wittmanns Methode, nach der die Aufgabe der Kinder war, in Kringelfeldern (also feststehenden Mengen) »abenteuernd« nach bestimmten Prinzipien sozusagen Untermengen einzukreisen, sah er gemäß Piaget sogar als begründet: entwicklungslogisch primär sei die Analyse, nicht die Synthese.

Im Klartext heißt dies eigentlich, daß die arithmetischen Operationen des »Ad-dierens«, also Zusammenzählens, bzw. des Subtrahierens, also des Abziehens, also der Vermehrung und Verminderung und Feststellen des *Ergebnisses* (der Summe bzw. der Differenz) sozusagen *ersetzt* werden durch das Manipulieren *innerhalb* einer gegebenen Menge, wobei es dann darauf ankommt, die Art der Manipulation in »mathematischer Schreibweise« darzustellen.

Dies nennt Resag »zaubern« und seine »Zauberfibel« liefert hierfür das Material. Wie bei Wittmann gibt sie Kringelreihen oder Kringelfelder vor, die per Einkreisen zu Paaren geordnet und wieder halbiert, in »Male« verteilt oder in andere Konfigurationen aufgeteilt werden. Diese Aufteilungsergebnisse sollen – wie bei Wittmann – als »Geschichten« erzählt und dargestellt werden (000 + 000 ist ebenso wie 00 + 00 + 00 eine »Sechsergeschichte«) – und wenn der »Wegstrich« eingeführt ist, werden »-Geschichten« in »+Geschichten« umgeformt und umgekehrt. Dies soll die Reversibilität fördern, die nach Piaget den Durchbruch brächte. Die gesprochenen »Geschichten« werden dann als Zahlengeschichten geschrieben – wobei die Kinder gelegentlich auch alle Positionen ergänzen können sollen (also z.B. 4+3=? ebenso wie 4+?=7 und ?+3=7 sowie die entsprechenden Weg-Geschichten).

Als »Grundoperationen« nennt Resag: Verteilen, Halbieren, Verdoppeln, Malnehmen, Zusammenzählen, Ergänzen, Aufteilen u. Einteilen, Wegnehmen, Zerlegen.

Resag läßt den Kindern die ganze zweite Hälfte des 1. Schuljahres Zeit, um diese Operationen im Zahlenraum bis 100 zu üben. Er gibt ihnen – anders als Wittmann, der gute Gestalten bevorzugte (also z.B. 7x7-Felder) – im Zehnersystem angeordnete Kringelfelder vor, die keine »harmonischen Abenteuereien« nahelegen, sondern im Grunde jede arithmetische Operation (sozusagen per Hilfsmittel auch anschaulich) zu vollziehen ermöglichen. Bemerkenswert ist, daß Aufgaben nach dem unten angegebenen Muster tatsächlich arithmetische Operationen verlangen, denn es ist nicht nur eine vorhandene Menge sozusagen erschöpfend aufzuteilen, sondern es sind in ihr Mengen von einer bestimmten Anzahl erst zu bestimmen, dann zu addieren etc. Diesen Umstand thematisiert Resag jedoch nicht.

---

8 Resags Buch »Kind und Zahl« erschien 1962, etwa gleichzeitig seine »Zauberfibel«, 1965 in 4. Auflage.

ooooo	ooooo	5+6=
ooooo	ooooo	32-11=
ooooo	ooooo	7x6=
ooooo	ooooo	36 aufgeteilt in Male mit 6=
ooooo	ooooo	36 verteilt auf 6 Male =
ooooo	ooooo	
ooooo	ooooo	
ooooo	ooooo	
ooooo	ooooo	
ooooo	ooooo	

Im gleichen Zeitraum und ebenfalls an Piaget anknüpfend wurde eine explizite »operatorische Methode« von Fricke und Besuden entwickelt. (Eine Übersicht über viele andere Methoden und deren Analyse unter der Fragestellung der »Denkerziehung« findet sich bei Steiner, 1973). Fricke und Besuden verwendeten die von Montessori entwickelten Cuisinaire-Stäbchen, also verschieden lange Stäbchen als Symbole für die jeweiligen Zahlen. Sie erfordern zunächst mal ein korrektes Zusammenlegen – was dann erst ein »Ablesen« ermöglicht. Das konkrete Tun ist hier also primär. (Da sich in dem später hier zu untersuchenden ADF-System keine »Reste« davon finden lassen, soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.)

2.3. *Die Mengenlehre*

Die eigentliche »Revolution« innerhalb der Mathematik-Didaktik (der Eingangsstufe) wurde weder von Psychologen noch von Mathematikern ausgelöst, sie ist vielmehr eine Art bildungspolitischer Aktion als Reaktion auf den »Sputnikschock«, der nach 1957 in der westlichen Welt zur Revolution des Bildungswesens führte, und die »Bildungskatastrophe«, die national 1965 von Picht ausgerufen wurde. Interessant ist hier, wie sich zwei verschiedene »Historien«, die gesellschaftliche und die pädagogische, »fachdidaktische«, zusammenfinden.

Der Schulunterricht sollte (ver)wissenschaftlich(t) werden; dies bedeutete vor allem, daß statt »Rechnen« logisches Denken gelehrt werden sollte. Mengenlehre gilt als Logik. Das Fach »Rechnen« wird zum Fach »Mathematik« – »die neue Mathematik« wird 1968 durch die KMK als verbindlich ab 1973 für die Bundesrepublik Deutschland verabschiedet (die von Wittmann und Resag erarbeiteten Grundlagen paßten übrigens prächtig zur Einführung der Mengenlehre).

Die Mathematiker haben umgehend (1973, vgl. Müller & E. Wittmann, 1984, S. 165) gegen die Einführung der Mengenlehre als Grundlage der Mathematik-Didaktik protestiert. Erfolglos. Mit dem Slogan »Mengenlehre macht unsere Kinder krank« wehrten sich verzweifelte Eltern, die vermutlich vor allem den kostenlosen häuslichen Nachhilfeunterricht nicht zu geben in der Lage waren, dagegen.

1984 wurde in Berlin die Mengenlehre einfach aus dem Lehrplan entfernt. Da sie aus welchen Gründen auch immer nahezu bundesweit als »abgeschafft«

gilt, bräuchte man darauf nicht weiter einzugehen, mir scheinen aber folgende Aspekte wichtig, weil sie als »Relikte« (oder Trümmer) erhalten blieben:

Mengenlehre als Grundlage des Mathematik-Unterrichts zu betrachten, bedeutet, zunächst die Qualität der Elemente von Mengen hervorzuheben (rote, runde, große vs. blaue, viereckige, kleine etc.) – um dann die Anzahl der Elemente als quantitative Eigenschaft einer nach einer oder mehreren bestimmten qualitativen Eigenschaften definierten Menge zu erkennen. Die Zahl ist dann – wie bei dem Gestaltpsychologen Wittmann – die Abstraktion der Quantität bzw. der Mächtigkeit einer Menge, anders als bei Wittmann wird diese Abstraktion (als Beachten ein(ig)er und Absehen von anderen Qualitäten) in den Mengenlehre-Lehrgängen aber ausdrücklich *gelehrt*.

Da Mengen in beliebige Teilmengen aufgeteilt werden sollen, werden die Elemente meist »unordentlich« dargeboten – nicht in umzuordnenden Ordnungen wie bei Wittmann und Resag.

Vermutlich da in der mengentheoretischen Terminologie von der Vereinigung etc. von Mengen ausgegangen wird, muß der arithmetische Gegenpart dann »Addition« heißen (statt zusammenzählen, weil dies begrifflich nicht klar genug vom zusammenfügen zwecks Vereinigung abhebt), und da das Wort »und« für die Vereinigung von Mengen steht (zumindest die logische Addition bezeichnet), muß die mathematische Addition dann mit dem Wort »plus« bezeichnet werden.

Wenn man davon ausgeht, daß Kinder begriffen haben, was »vereinigen« bedeutet (A und A = A), nun aber den quantitativen Aspekt begreifen sollen, und dafür das Wort »plus« lernen (1A + 1A = 2A), so *kann* dieses Wort für sie eine Bedeutung haben. Wenn die Kinder jedoch weder die mengentheoretischen Operationen noch die entsprechenden Termini mehr lernen, aber dennoch »plus« sagen und denken sollen, wissen sie u.U. nicht, was das bedeutet, da ihnen sozusagen der Gegenbegriff fehlt.

Mengenlehre macht es weiterhin notwendig, die »leere Menge« einzuführen, womit die Null, von Anfang an (auch als Zahl) gelehrt werden mußte.

3. *ADF-System: Lehrmethode – aber auch Lernmethode?*

Gemäß dem (immer vorläufigen) Berliner Lehrplan von 1984 sollen die Kinder in jenem Schulfach, das »Mathematik« heißt, während des 1. Schuljahres die Addition und die Subtraktion im Zahlenraum von 0 bis 20 lernen. Sind das wirklich nur 21 Zahlen und 2 Grundrechenarten?

Wäre dies so, so wäre dies gegenüber allen Lehrgängen, die ich gefunden habe, ein Minimum (Wittmann und Resag sahen für das 1. Schuljahr alle vier Grundrechenarten im Zahlenraum bis 100 vor; der »Stoff« im Lehrbuch der DDR, 1987, für das 1. Schuljahr bezieht sich auf 3 Grundrechenarten im Zahlenraum bis 100 – im derzeitigen amerikanischen Lehrmaterial ist es auch nur die Addition und Subtraktion, aber ebenso im Zahlenraum bis 100). Wäre es wirklich eine Reduktion, so müßte man annehmen, daß dies »Lernziel« auch von allen Kindern erreicht werden könnte.

Bei der Untersuchung dieses ADF-Systems lasse ich mich von folgenden »wirklichen Erlebnissen« leiten:

- Einige LehrerInnen, die mit diesem System »arbeiten«, sagten mir, sie verstünden es überhaupt nicht, sähen immer vorher im »Kommentar« nach, was mit welchem Bogen zu tun ist, und gäben dann den Kindern die entsprechenden Anweisungen.
- Ein Zweitklässler, den ich fragte, wieviele Rechenarten es s.E. gäbe, sagte mir, er könne das unmöglich wissen. Auf meine Bitte nach einer Schätzung, antwortete er »ungefähr tausendfünfhundert«. Als ich erstaunt nachfragte, wieviele er davon schon gelernt habe, schätzte er 365 und verwies auf seine dicke Akte. Das waren insgesamt zwar nur ca. 150 Bögen, aber er wird vielleicht die Mathematikstunden seiner kurzen Schullaufbahn geschätzt haben – oder was?! Dieser Schüler galt in der Schule als von der Begabung her mittelmäßig. Wie Lehrer sagen: »Er ist drei«.

Bevor ich mit der Darstellung des Inhalts des ADF-Systems anfange etwas zur Form. Der Teil für die Hand des Schülers besteht aus »reinen« *Arbeitsbögen*, die zwar zusammengeheftet sind, jedoch einzeln ausgegeben werden (sollen). Sie enthalten keinerlei Arbeitsanweisung sondern jeweils »oben« eine Art Beispiel, nach deren Muster dann weiteres bearbeitet werden soll. Insofern sind die Schüler – falls sie das »Muster« nicht deuten können – auf die Anweisung des Lehrers angewiesen. Es gibt – auch wenn man die Bögen anschließend wieder zusammenheftet – keine Übersicht, keine Gliederung, nichts, was man noch mal nachsehen, in Ruhe selbst nachlesen oder später nachschlagen könnte. Sie ähneln in nichts einem »Lehrbuch«, mit dem die Schüler außerhalb oder auch während des Unterrichts selbst etwas »lernen« könnten. Nirgends wird zwischen »Neuem« und »Wiederholung« unterschieden. Sie ermöglichen nicht, etwas zu begreifen – sondern nur »zu üben«. Damit sind die Schüler bezüglich des »Lernens« total vom Lehrer abhängig. (Vgl. im Kontrast dazu das Lehrbuch der DDR.)

Die Absicht der Autoren des ADF-Systems besteht nun nicht darin, Schülern »den Zahlbegriff« zu vermitteln, sondern einen »vielseitig aspektierenden Zahlbegriff«. »Viel« ist genau »vier«: die mengentheoretisch fundierte Kardinalzahl, die Ordnungs- oder Ordinalzahl, die Maßzahl und die Rechenzahl.

Nun zum »Arbeitsmaterial«. Auf dem 1. Bogen ist ein Bild vom Zoo, auf dem 2. sind Zootiere zu sehen, es folgt ein Bild vom Strand, eine Darstellung verschiedener Stifte und schießlich eine Ansammlung von Nägeln, Schrauben etc. nebst 2 Schubladen. Sie alle haben den Zweck, zunächst die Frage »was ist das?« zu stellen, um dann auf die Fragen »wieviele davon« bzw. »wovon gibt es mehr, wovon weniger« überzuleiten. Die Aufmerksamkeit der Kinder wird also zunächst auf etwas gelenkt (die »Qualität« der Elemente), was sie hinfort *nicht* mehr beachten sollen. (Wenn man so will, werden hier zwei »Operationen« [oder »Rechenarten«?] gefordert: Benennen der Qualität – und Benennen der Quantität.)

Da die Gegenstände »unordentlich« angeordnet sind, ist die Aufgabe der Kinder, »Ordnung zu machen« (was für die meisten Kinder eine schreckliche Aufforderung sein dürfte!), da man ja aber gedruckte Dinge nicht einfach aufräumen kann, lernen die Kinder ein Verfahren dafür: Einkreisen, oder wo das nicht möglich ist, »Einpfeilen«. (Damit sind, wenn man so will, zwei weitere »Operationen« eingeführt: Einkreisen und einpfeilen.)

Die folgenden 4 Blätter fordern die Stück-zu-Stück-Zuordnung ab (Knöpfe zu Knopflöchern, Eier zu Eierbechern), wobei an den »Schiebespuren« (den Pfeilen) abgelesen werden soll, ob es gleich viel, mehr oder weniger sind. Die Autoren gehen (im Kommentar) davon aus, daß die meisten Kinder schon zählen können, wollen aber dennoch im »Urschleim« wühlen, da die Kinder eben meist nicht ordentlich zählen können. Fraglich ist, ob den Kindern klar (gemacht) wird, daß sie etwas vervollkommnen sollen oder können – oder eher der Eindruck erweckt wird, daß es um etwas »ganz neues« geht – schließlich dürften sie noch nie in ihrem Leben »Schiebespuren« gezählt haben. (Mit den »Operationen« ordnen, zuordnen, festellen von »mehr«, »gleich« bzw. »weniger« ergeben sich fünf neue, insgesamt jetzt 9 »Operationen«, ohne daß gerechnet würde.)

Mit dem 10. Bogen geht es endgültig zu den Zahlen. Sie werden als »mengentheoretisch fundierte Kardinalzahlen« eingeführt, anders als bei Wittmann und Resag sofort mit dem Zahlennahmen und dem Symbol. Anders als bei Wittmann und Resag werden die Zahlen auch nicht als sozusagen »neutrale Symbole« wie Kringel und Plättchen veranschaulicht, anders als in den Mengenlehre-Zeiten nicht als geometrische Figuren verschiedener Größe, Dicke, Farbe, sondern als gemalte Kärtchen mit Abbildungen von Personen, Gegenständen, Pflanzen etc.

Wie kommt man nun von all den Püppchen, Fischen, Schrauben zur Anzahl? Hier muß der/die LehrerIn Zusatzarbeit leisten. Sie stellt zum Sortieren aller Mengenkärtchen, die den Kinder im Anhang bereitgestellt werden, und die sie zusätzlich selbst herstellen, Schuhkartons zum Sortieren zur Verfügung. Diese Schuhkartons reichen nicht für alle Arten von Abbildungen (z.B. Menschen, Fische, Motorräder, Schrauben, Bäume, Blumen etc. etc.) – was tun? Nein, die Kinder bringen keine neuen Schuhkartons mit, sondern sie »entdecken«, daß die vorhandenen genau reichen, wenn man die Kärtchen nach der Anzahl der jeweiligen Gegenstände sortiert! Damit man weiß, welche Sorte von Kärtchen welcher Schuhkarton enthält, wird auf die Stirnseite eines geklebt – und dann können sich die Kinder gemäß der Anzahl sogar verständigen, indem sie ein entsprechendes Mengenkärtchen hochhalten!

Die Frage ist, ob Kinder auf diese Weise wirklich lernen, die Anzahl zu erfassen, oder eher verwirrt werden. Sie werden pausenlos auf evtl. interessante Dinge und Vorgänge orientiert (z.B. auf Blatt 10 können sie sich fragen, warum die Familie von VaterKindMutter in dieselbe Schublade soll wie KanneBecherTeller, warum eine Familie überhaupt in eine Schublade eingepfeilt/sortiert wird u.v.a.m.) – und wenn sie anfangen, darüber nachzudenken, müssen sie abschalten: es geht darum, daß sie die »Dreiheit« »entdecken«, die sie vermutlich vorher schon kannten.

Damit es wirklich »nicht zu einfach ist« (Kommentar S. 21), fehlen auf einigen Bögen die passenden Schubladen. An die dadurch nun wieder möglicherweise entstehende Verwirrung der Kinder wird anscheinend nicht gedacht.

Diese Einführung des Anzahlbegriffs wäre nach Piagets Ergebnissen unsinnig: auch seine 3jährigen Vpn hatten *keine* Probleme mit der Verschiedenheit (i.S. von »Qualität«) der gemäß ihrer Quantität zu vergleichenden Gegenstände. Was aber auch den 6jährigen oft noch Schwierigkeiten bereitete, war die unterschiedliche *Fläche*, die sie einnahmen, d.h. in Piagets Versuchsanordnung der Abstand zwischen den Gegenständen. Weil aber die Mengenkärtchen immer gleich groß sind, ist die Fläche, die zwei Gegenstände einnehmen, ebenso groß wie die, die 10 Gegenstände einnehmen sowie die, die kein Gegenstand einnimmt. Demnach würden Kinder eher darauf schließen, daß alle diese Mengen »gleich viel sind«. Außerdem: Sobald ein Kind einen Begriff von einer Anzahl entwickelt hat, hängt es von seiner Intention ab, ob es die Qualitiät/Art oder die Anzahl zentriert. Will es *Gummibärchen* (und keine Kekse) – oder will es *drei* Süßigkeiten (für sich und die beiden Freundinnen)?

Bezüglich der Reihenfolge der einzuführenden Zahlen findet der Leser folgendes: »Über die Reihenfolge der Einführung der Zahlen ist im zurückliegenden Jahrhundert vehement und doch dafür fruchtlos gestritten worden. Die in unserem Team mitarbeitenden Lehrer haben auch unter motorischen Gesichtspunkten die Abfolge 3,2,4 / 1,0,5 für gut befunden. Das Schöne an Arbeitsblättern ist, daß sich der Lehrer nicht an deren Reihenfolge zu halten braucht« (Kommentar, S. 23). Gut und schön für wen? Und inwiefern sinnvoll?

Möglicherweise gibt es in dem zitierten Streit mehr Stimmen als Wittmann und Resag, aber Wittmann begründet seine Reihenfolge (außer mit der zu verhindernden »Mechanik«) auch mit *Beziehungen* zwischen den Zahlen, die sich aus dem Halbieren, Verdoppeln und Zusammenfügen von Halbiertem und Verdoppeltem ergeben. Eine derartige Beziehung wird im ADF-System nicht hergestellt, die »Anzahl« muß im Grunde genommen einfach »memoriert« werden: wenn es »so« aussieht, ist das »fünf« etc. – wobei »es« eben immer anders aussieht (sowohl bezüglich des Inhalts als auch bezüglich der Anordnung).

Der einzige Ausweg, der einem Kind, das tatsächlich bei Schulbeginn noch Schwierigkeiten hat, die Anzahl zu ermitteln, bliebe, wäre, zählen zu lernen. Und genau dies soll nicht gelehrt (also auch nicht gelernt?) werden. Andererseits:

würden die Kinder zählen und zählen, weil das der einzige Ausweg ist, die Anzahl zu ermitteln, würden sie eben auf die Ordinalität festgelegt, könnten die Kardinalzahl eben nicht begreifen (vgl. Baruk, 1989).

Das Problem, wie man Kindern dann die »richtige Reihenfolge« vermittelt, wird mit dem Vorschlag zu lösen versucht, Abzählreime zu lernen. Diese erfordern einerseits genau das »Herleiern« von »einszweidrei...«, das Wittmann z.B. vermeiden wollte, außerdem stellte sich das Problem, daß die Null in keinem Abzählreim vorkommt. Deshalb wird vorgeschlagen, die »Verminderung der Mächtigkeit um genau eins« ins Rampenlicht der Aufmerksamkeit zu rücken. Die außerordentlich wichtige Information, daß es sich bei den Zahlen in der (vom Kind evtl. schon »gekonnten«) »richtigen« Reihenfolge um die *Vermehrung um genau eins* handelt, wird nicht gegeben.

Das kann bedeuten: Den Kindern, die die »richtige« Reihenfolge schon können, wird diese zerbrochen, dann – ohne Gewinn (ohne den Hinweis, daß es genau um eins mehr wird) wieder antrainiert – um sie dann gleichzeitig rückwärts zu lernen. Jene Kinder, die die »richtige« Reihenfolge noch nicht kennen, wird sie zunächst in bunter Mischung dargeboten, sodann gleichzeitig vorwärts und rückwärts aufzusagen gelernt – und sie werden auf die Verminderung hingewiesen. Flexibilität im Zahlaufbau oder (induziertes) Chaos?

Nicht erwähnt wird die eher wirklich vehemente Diskussion um die Null. Wie oben erwähnt kam die Null in Form der »leeren Menge« in die Lehrgänge des 1. Schuljahrs. Bei der Einführung der natürlichen Zahlen ist sie unnötig – sie würde erst bei der Einführung der Subtraktion notwendig werden. Im ADF-System wird sie im Grunde auch als »leere Menge« (allerdings ohne diese Bezeichnung) eingeführt: leere Mengenkärtchen kommen in leere Schuhkartons (die dann allerdings nicht mehr leer sind). So gleicht die Null einem »nichts«, was sich später verhängnisvoll auswirken muß: die Null hat viele verschiedene Bedeutungen, ist zumeist eine bestimmte Negation, aber nie »nichts«!

Die Zahlen von 6 bis 10 werden dann ohne Diskussion in der »richtigen« Reihenfolge eingeführt, aber auch hier wird nicht auf die Vermehrung um genau eins verwiesen, vielmehr wird real die *Zusammensetzung* dieser Mengen aus (je zwei – warum nur zwei?) schon »bekannten« Mengen dargestellt, im Kommentar aber hervorgehoben, daß es sich um *Zerlegung* in – und dann auch um Zusammensetzung von – schon bekannte(n) Mengen handelt.

Parallel zu den Arbeitsbögen (die vorwiegend Mengenbilder enthalten) sollen die Lehrer weitere Hilfsmittel einsetzen: Streifendarstellungen, Punktbilder und eine Perlenschnur. Die Begründung ist, daß sich mit einem eher der kardinale Aspekt, mit einem anderen eher der ordinale Aspekt veranschaulichen läßt. Da diese vier Hilfsmittel weiterhin im gesamten Unterricht eingesetzt werden, könnte bei den Kindern jedoch auch der Eindruck entstehen, es handle sich ebenfalls um »vier Rechenarten«, die sich mit den sonstigen gelernten »Rechenarten« zu einer Vielzahl von Rechenarten multiplizieren oder addieren: jetzt wird nicht mit der Perlenschnur gearbeit, sondern mit den Streifen, und jetzt mit den Punktbildern – und schließlich wieder mit den Mengenkärtchen.

Weil es im Lehrplan steht (oder um doch eine Ordnung in die Zahlen zu bekommen und die Mechanik dabei zu vermeiden?), müssen die Kinder jetzt Mengenkärtchen danach vergleichen, wo »mehr« und wo »weniger« ist. Dies dürfte den Kinder eine gewisse Schwierigkeit bereiten (s.u.), aber es werden dafür auch noch die entsprechenden Zeichen eingeführt (< und >), und da auch die Autoren wissen, daß diese Zeichen schwer »richtig« zu setzen sind, wird empfohlen, Beispiele auf großen Karten im Schulzimmer anzubringen, wo die Kinder dann immer nachsehen können. (Die Dynamik, die in diesen Zeichen steckt: von der kleinen Spitze zu der großen Öffnung wird es *mehr!* wird anscheinend nicht vermittelt[9]).

Zur »Stabilisierung« der Ordnung sollen die Kinder weiterhin folgende Fragen beantworten: »Wieviele Zahlen fehlen zwischen 6 und 9?« und »Wieviele Zahlen fehlen zwischen 7 und 2?«. Ausnahmsweise geht es zuerst vorwärts und dann rückwärts. Aber diese Übung dürfte sich im Weiteren verhängnisvoll auswirken: zwischen 6 und 9 fehlen 2 Zahlen, aber um 6 zu 9 zu ergänzen, braucht man 3! Zwischen 7 und 2 fehlen 4 Zahlen, aber 7 minus 2 ist 5. Hier wird eine Klippe, die sich Kindern oft beim Lernen der Addition und der Subtraktion stellt, direkt *erzeugt*. Schöniger (1989) sieht in dem »Verrechnen um eins« einen Hinweis auf Arithmasthenie – und führt es aufs Fingerrechnen zurück!

Mit dem 28. Arbeitsbogen, also nach ca. einem viertel Schuljahr, wird der »Rechenzahlaspekt« eingeführt, wie die Autoren ausführen »das Auffassen der Zahl (als) Ergebnis einer Operation« (Kommentar S. 39). Hierfür gibt es eine Schreibweise, die bei Wittmann »wippen« genannt wird, in anderen Lehrgängen als »Hausschreibweise« auftaucht: Ins Dach des Hauses kommt die Summe, in die beiden Zimmer darunter kommen die Summanden.

$$\frac{7}{3 \mid 4}$$

Bei Wittmann jedoch wird dies »wippen« fortgesetzt, unter 3 | 4 steht dann 2 | 5 etc. Stellt man sich diese Schreibweise als »Haus« vor, so ist sie in gewisser Weise »unlogisch« – im kleinen Dach steht mehr als in den beiden großen Zimmern.

Auf den Mengenkärtchen findet man folgende Darstellung: sie sind in der Mitte durchteilt, jede Hälfte enthält eine Art Mengenkringel, von dem einer z.B. 3, der andere 4 Gegenstände enthält. »In einfacher Sprache« soll dies so gesprochen werden »Ich zerlege den Siebener in einen Dreier und einen Vierer«.

---

9 Kinder haben mir erzählt, daß ihnen als Eselsbrücke angeboten wurde: wenn man einen Strich dran macht, so daß ein K bzw. dessen Umkehrung herauskommt, so zeigt der Strich – wie »klein« – zum Kleineren. Eselsbrücken für Kinder, die man für so starrsinnig wie Esel hält?

Benutzt man die Mengenstreifen, soll die Frage lauten: »hier ist ein Dreier, welcher Streifen muß dazu kommen, damit wir einen Siebener haben?«. Es wird weiterhin geraten, *alle Zerlegungssätze* so weit zu erarbeiten, daß sie sich einprägen. Ab dem 34. Bogen wird nun auch in Gleichungsform geschrieben: 3+4=7 – was als »Plussätze« zu bezeichnen ist (keinesfalls als »Plusaufgaben«, da es ja keine »Aufgaben« sind). Es ist zwar aus dem Kommentar nur zu erschließen, daß diese Gleichung »drei plus vier gleich sieben« gesprochen wird, aber es spricht alles dafür.

Die Kinder stehen also vor folgender Merkwürdigkeit: sie haben ein Mengenkärtchen mit 2 Abteilungen, und sollen dies so »verbalisieren«: ich zerlege einen Siebener in einen Dreier und einen Vierer – Drei plus vier gleich sieben. (Falls die Kinder schon lesen können, lesen sie in der Kopfzeile »Einführung Addition«). Die Addition bzw. das Hersagen von Plussätzen bedeutet offensichtlich, Zerlegungssätze in *umgekehrter* Reihenfolge aufzusagen und dabei die Wörter »plus« und »gleich« irgendwie einzufügen. *Wenn* ein Kind sich tatsächlich alle Zerlegungssätze (von 0 bis 10 sind es – wenn man immer nur in zwei Mengen zerlegt – immerhin 65!) »eingeprägt« hat, kann es jetzt auch alle Arten von »Leerstellen« ausfüllen, wenn man ihm also z.B. 3+?=7 vorgibt, kann es die 4 korrekt einfügen, wenn man ihm 3+4=? vorgibt, kann es die 7 korrekt einfügen. Fraglich ist, ob es weiß, was es dabei tut. Hat es sich die Zerlegungssätze aber *nicht* eingeprägt, hat es keine Möglichkeit, irgendeine Leerstelle auszufüllen, *denn die Operation des Zusammenzählens* wurde nicht nur nicht gelehrt, sondern eigentlich direkt verhindert oder zumindest behindert dadurch, daß deren *Umkehrung* verbalisiert wird.

Daß Zählen und Zusammenzählen tatsächlich nicht gelehrt werden soll, kann man einer Bemerkung im Kommentar entnehmen: sollten Schüler »spontan« zählen, sollte der Lehrer drauf achten, daß sie nicht immer von vorn anfangen, sondern vom ersten Summanden aus weiterzählen. Warum man nicht von vorn anzufangen *braucht*, wird allerdings nicht thematisiert. Außerdem ergibt sich aus dieser Bemerkung, daß der Unterschied zwischen »zählen« und »zusammenzählen« offensichtlich nicht als vermittlungswürdig betrachtet wird.

Ohne Begründung wird dann wieder eine neue Schreibweise eingeführt:

+	3	2	4	1
1				
5				
4				
2				

(Möglicherweise wird diese von den Kindern auch als »neue Rechenart« gedeutet?)

Zur »Vorbereitung auf die Subtraktion« wird dann statt des + auch schon mal ein – geschrieben (5-3=?), weil (man lese und staune! die Autoren wissen anscheinend, was sie tun – aber warum tun sie es?) eine Ergänzungsaufgabe trotz des Pluszeichens die Frage nach der Differenz zwischen zwei Zahlen enthält. Diese Art von »Vorbereitung«, daß etwas »schon mal gemacht wird« *bevor* es systematisch eingeführt ist, dürfte Kinder durchaus verwirren. (Wen wundert dann noch, daß Kinder sehr häufig auch 5+3=2 schreiben? Schöniger hält auch diesen Fehler für einen eindeutigen Hinweis auf Arithmasthenie – Baruk erkennt hier die Automathen.)

Die Subtraktion beginnt wieder mit Bildern: ein Kind ißt Kuchenstücke, Eisenbahnwagen sind umgekippt, Eier sind zerbrochen. Auf der Halbierung der Mengenkärtchen erscheint eine Schere, die Schere schneidet auch Perlenketten und Zählstreifen durch. Zunächst kann man die geforderten »Minussätze«, falls man das Prinzip (kaputt, umgekippt etc. heißt »weg«) verstanden hat, immer noch ablesen – sie haben gegenüber den »Plussätzen« genau genommen den Vorteil, daß man sie in der selben Reihenfolge wie die Zerlegungssätze aufsagen kann.

Anders als bei der Addition wird jetzt aber im Kommentar vorgeschlagen, den Vorgang des Verminderns durch *Rückwärtszählen* vorzunehmen, wobei man praktischerweise mit –1 anfangen soll, um dann zu –2 überzugehen.

Weil der Lehrplan es verlangt (!) werden nun »Operatoren« eingeführt. Genau genommen handelt es sich nur um eine neue (die 4.) Schreibweise für Grundrechenarten, aber das wird den Kindern vermutlich nicht deutlich. Es soll sich eher um eine Art »Maschinenrechnen« handeln, wobei die Maschine immer nur eine bestimmte Operation ausführt (z.B. »–4« in die von einem Pfeil angegebene Richtung), Eingabe und Ausgabe zu bestimmen sind, später auch die Operation (bei gegebener Ein- und Ausgabe) selbst.

$$4 \xrightarrow{(+3)} 7$$

Es wäre nicht erstaunlich, wenn die Kinder hier »wieder eine neue Rechen*art*« denken würden, und die Kombination der Operatoren mit Tabellen auch wieder als »neue Rechen*art*« ansehen würden.

Wichtig ist, daß bislang *keine Gleichungen* gerechnet wurden, es wurden niemals z.B. 2 Teilmengen (in ihrer Summe) mit einer anderen Menge verglichen, sondern ja immer nur Mengen in Teilmengen zerlegt; dennoch kommen jetzt *Ungleichungen* dran.

Möglicherweise ist ja diesem oder jenem Kind das Kunststück gelungen, die Zerlegungsmenge als »gleich mächtig« wie irgendeine andere Menge (im Schuhkarton) zu begreifen. Den Kindern, denen das nicht gelungen sein sollte, wird nun zugemutet, die Zeichen < und >, die es vor langem schon »mal gehabt hat« statt des Zeichens = zu verwenden, falls die »Zerlegungsmenge« nicht die ist, die sie sein sollte – und dann auch noch in der »richtigen« Orientierung. Mit drei Schubladen auf dem Arbeitsbogen, die mit =, < und > markiert sind, wird auch angedeutet, daß es sich hier um verschiedene »Aufgabentypen« o.ä. handelt.

Das Problem, vor dem die Kinder hier stehen dürften, läßt sich schwer beschreiben. Dennoch ein Versuch am Beispiel 3+4=7. Nach dem, wie dies bislang gelehrt wurde, sind die 7 (Bonbons) *identisch* mit den 3 (Bonbons) und den 4 (Bonbons). Es wurden *nicht »diese«* 3+4 (Bonbons) mit *»jenen«* 7 (Bonbons) *verglichen*. Um aber Ungleichungen lösen zu können, muß genau dieser Vergleich stattfinden.

Es wird – laut Kommentar – aber *nicht* darauf hingewiesen, daß zur Lösung dieser »Probleme« nun *zwei* Rechenoperationen durchgeführt werden müssen: 1. muß ja die Summe bzw. die Differenz gebildet werden, 2. muß diese mit einer dritten Zahl verglichen werden. Zusätzlich stehen die Kinder sofort vor dem Problem, daß es bei diesen Ungleichungen – kommen sie als Platzhalteraufgaben vor – »Lösungsmengen« gibt, also nicht eine, sondern u.U. mehrere Zahlen einzufügen sind. (Die Ungleichung 2+?<8 hat als Lösungsmenge {0,1,2,3,4,5}.)

Dem Kommentar ist zu entnehmen, daß es sich hier nur um ein »Hineinschnuppern« handelt, weils der Lehrplan halt verlangt (S. 76). Daß hier eine wichtige Erkenntnis (die Operationen Addieren und Substrahieren haben *ein eindeutiges* Ergebnis) zugunsten einer Ahnung von Gleichungen, Ungleichungen und Lösungsmengen vorenthalten wird, dürfte äußerst verwirrend sein.

Ohne das in früheren Rechenlehrgängen zu findende Brimborium werden dann flugs die Zahlen von 11 bis 20 eingeführt und alles, was bisher gemacht wurde, in diesem Zahlenraum durchgeführt. Hier soll sich – beim Rechnen über den Zehnerübergang – das Zerlegenkönnen auszahlen – wie? Schöniger (1989) hält das »falsche Kippen« von Zerlegungsmengen (12–5; 12–2=10, 10+3=13) für einen Hinweis auf Arithmasthenie! Wird dies »falsche Kippen« *so* gelernt? Aber, so die ADF-Autoren, es sei Schülern erlaubt, auch einfach zu zählen. Gelehrt wurde das Zählen nicht – evtl. vertrauen die Autoren darauf, daß Kinder dies – trotz des konstanten Beharrens auf dem *Zerlegen* – »spontan« erfinden bzw. von den Eltern lernen.

Ein paar neue Begriffe werden noch eingeführt: Umwegaufgaben (besonders für den Zehnerübergang), Kettenaufgaben (die man per Operatorschreibweise auch im Kreis oder im Netz laufen lassen kann), Nachbaraufgaben (als Rechenvorteil!). Noch mal 3-5 »neue Rechenarten«?

Dann wird mit Geld gerechnet, die Bank stellt dies gern in Form von Pappmünzen und Pappscheinen zur Verfügung. Die Autoren vermerken, daß der Umgang mit Geld den »meisten« Kindern nicht neu ist (was ist mit den wenigeren Kindern?), daß sie mit Preisen oft besser rechnen können als mit natürlichen Zahlen. Das ist bekannt, Frage ist nur, warum nicht früher daran angeknüpft wird. Genau genommen müßten Kinder aber bei den angeführten Beispielen den Zahlenraum bis 1000 kennen, um das Verhältnis von Pfennigen zu

Markstücken wirklich zu verstehen – aber dieser wurde noch nicht und wird hier nicht gelehrt. – Den Abschluß bilden Übungsaufgaben, die ausdrücklich nicht als »Sachaufgaben« deklariert werden. Wieder gibt es Bilder: die Eingangshalle eines Schwimmbades, einen Kindergeburtstag. Die Kinder sollen hier selbst herausfinden, was eine passende »Rechenoperation« sein könnte. Dies soll aber nicht als »Rechensätze« geschrieben werden, sondern in Alltagssprache. Hier wäre eine Möglichkeit gewesen, eine Verbindung zwischen »Kalkulierbarem« und mathematischer Schreibweise herzustellen. Aber es soll unterbleiben. Eine Begründung fehlt.

(Bei dieser Darstellung ausgelassen habe ich die Geometrie, damit auch die Einführung von »Längen« und Maßzahlen.)

Es ist mir – zum Schluß des Lehrgangs für das 1. Schuljahr – nicht möglich, die Zahl der vermeintlichen gelernten (oder eben nicht gelernten) »Rechenarten« zu zählen, weil mir unklar ist, wie die Kombinationen zu ermitteln sind. Abgesehen von den »Hilfsoperationen« gibt es zumindest 4 verschiedene Schreibweisen für die Addition und die Subtraktion[10], wobei diese »Sätze« oder »Aufgaben« sein können und als Leerstellen mindestens 3 Zahlen-Stellen (wofür 21 Zahlen zur Auswahl stehen), 2 Rechenzeichen (+ und –) sowie 3 Vergleichs-Zeichen (=, <, >) haben können. Dies alles kann veranschaulicht werden mit 4 Hilfsmitteln. So kämen 7x2x8x4 »Rechenarten«, also 448 (!) zusammen. Die Schätzung von 365 wäre gar nicht so falsch.

Die Tatsache, daß es sich – mathematisch gesehen – um nichts anderes handelt als Zusammenzählen und dessen Umkehrung, also Abziehen, im Zahlenraum von 0 bis 20, dürfte sich kaum erschließen – ein einfacher Rechner, der nur 2 Tasten dafür vorsieht, den Kindern nicht brauchbar erscheinen. Trotz der vielen (»kindgemäßen«?) Bilder und gemalten Gegenstände dürfte auch unklar sein, was ein Kind mit dem »gelehrten« anfangen kann. Was haben all die vielen Zerlegungssätze in den verschiedenen Schreibweisen mit seinen eigenen Kalkulations-Problemen zu tun?

4. *Thesen für einen Neuanfang*

Möglicherweise gibt es auch in den »alten Bundesländern« Mathematik-Lehrgänge, die die bei der Betrachtung des ADF-Systems aufgewiesenen Verwirrungen und »Fehler« nicht enthalten. Man kann aber auch annehmen, daß die hier gefundenen »Trümmer« – von gestaltpsychologischen Überlegungen, Piaget-Rezeptionen, Mengenlehre – in ähnlichen Mischungen auch in anderen Lehrgängen enthalten sind.

---

10 Da die »Hausschreibweise« sich bezüglich der Addition und Substraktion nicht unterscheidet, ergeben sich nur 7 »Arten«.

Wie auch immer – mathematische Fähigkeiten werden nur von wenigen Kindern ausgebildet, also lohnt es, darüber nachzudenken, wie man es »besser« machen kann, indem man Verwirrungen vermeidet.

4.1. *Die »Motivation«*

Die Faszination des Rechnens für Kinder soll nach Wittmann im »Abenteuern« liegen, nach Resag im »Zaubern«. In Kringelfelder kann man »abenteuernd« eingreifen, indem man sie auf verschiedenste Arten zerlegt, aus Kringelfeldern oder Kringelreihen lassen sich andere »zaubern« und diese kann man dann in Zahlen und Rechenzeichen transformieren. Für kleine Kinder hat »Zauber« jedoch nur eine geringe Faszination – wo sie nicht wissen, daß etwas *unmöglich* ist, halten sie schlicht nahezu alles für möglich, wundern sich nicht darüber, wenn ein Zauberer Kaninchen aus seinem Hut holt etc. Aber der Exaktheit der Mathematik wird mit Begriffen wie »Abenteuern« und »Zaubern« genau genommen jedoch widersprochen.

Wenn Rechnen aber als »zaubern« eingeführt wird, ist unwahrscheinlich, daß Kinder bei ihrem »zaubern« mit Zahlfeldern auf die Idee kommen, daß dies mit ihrer Alltagsbewältigung irgendetwas zu tun hat. Frage ist auch, ob Kinder das einkringeln von Kringeln wirklich so »abenteuerlich« finden, wie Wittmann behauptet. Auch wenn Wittmann darauf hinweist, daß bei seiner Methode Kinder sich immer selbst beschäftigen können, nie gelangweilt herumsitzen müssen, da sie sich immer selbst Kringelfelder herstellen und darin abenteuern können, ist fraglich, ob dies »abenteuern« und »zaubern« *wissenschaftliches* Interesse wecken kann.

Schon bei Wittmann und auch noch heute im ADF-System wird Mathematik als »ordnen«, »Ordnung machen« gefaßt. Aller Beobachtung nach wird »Ordnung machen« im Sinne von »aufräumen (müssen)« für Kinder emotional negativ bewertet. Es bedeutet meistens, ein Spiel quasi rückgängig zu machen. Wieso sollen sie es spannend finden, eine Unordnung zu beseitigen, die sie nicht einmal selbst hergestellt haben? Eher ist anzunehmen, daß »Ordnung machen« zu sollen demotivierend wirkt.

In den neueren Mathematik-Lehrgängen gibt es keine Kringel mehr, die bei Wittmann für die Symbolisierung gleichweden zählbaren Dinges stand, offensichtlich versucht man den »kindlichen Interessen« eher kindertümelnd zu entsprechen, indem man sie Puppen, Tiere, Negerküsse etc. einkringeln, vergleichen und schließlich zählen und zerlegen läßt. (Die Familie, aus VaterMutter-Kind bestehend, kommt in die selbe Schublade wie die drei Schrauben.) Auch hier kann man (mit Leontjew 1982) eher davon ausgehen, daß Aufmerksamkeit wie Interesse der Kinder eher auf diese abgebildeten Gegenstände als auf die rechnerischen Operationen gerichtet werden.

Das eigentlich »spannende« am Zählen und Rechnen dürfte m.E. für Kinder jedoch sein, daß man quasi ein *Rätsel* hat, mit einer *eindeutigen Lösung*, die man »rauskriegen« kann, wenn man die richtigen Operationen adäquat anwendet.

Dies geht aber völlig verloren, wenn Rechnen vom Ergebnis ausgehend eingeführt wird: Es mag für ein Kind spannend sein, zu eruieren, ob es beim Murmelspiel reicher oder ärmer geworden ist, wieviele Murmeln es jetzt hat etc. Warum sollte ein Kind es aber spannend finden zu eruieren, in welche Summanden es die Summe 7 *zerlegen* kann? Wenn es doch schon weiß, daß es jetzt 7 Murmeln hat, braucht es doch nicht mehr zu überlegen, aus welchen Mengen sich diese 7 zusammensetzen ließen![11] Dies gleicht dem Vorhaben, einem passionierten Silbenrätsel-Rater fertige Wörter vorzulegen und ihn aufzufordern, diese in Silben zu zerlegen und alphabetisch zu sortieren. Wäre dies in irgendeiner Weise »spannend«, wäre diese Marktlücke längst entdeckt. Gerät irgendjemand ins Grübeln, wenn man ihm ein Rätsel »rückwärts« erzählt, etwa so: ein Hund macht wau-wau und steckt in einem grünen Rucksack, der an der Wand hängt?[12]

Das *wissenschaftliche* Interesse der Kinder könnte m.E. darin bestehen, daß sie lernen, daß es Operationen gibt, die *immer* ein *eindeutiges Ergebnis* zu kalkulieren erlauben – eines Ergebnisses, das auch von den Eltern und in Honolulu als »richtig« anerkannt wird.

Bezüglich der Reversibilität der mathematischen Operationen wäre folgendes zu bedenken: Wenn die elementarsten Operationen mathematisch das »Zusammenzählen« und deren Negation dann das »Wegnehmen« sind, so sind dies in der Praxis emotional unterschiedlich gewertete Operationen – etwas dazu zu bekommen ist in der Regel erfreulich, etwas zu verlieren o.ä. ist hingegen in der Regel unerfreulich. Sollte allerdings die Verminderung emotional positiv sein (nur noch 5,4,3 Stücke von diesem ekligen Fleisch zu essen), ist die Vermehrung (man bekommt einen Nachschlag) emotional negativ. (In der Regel hat eine positiv gewertete Verminderung keine Umkehrung: wenn es nur noch 6,5,4 Tage bis Weihnachten sind, so werden es niemals wieder 5,6,7 Tage.) Insofern ist es mit der »einfachen Umkehrung« sicher nicht so einfach.

4.2. *Die Sprache*

Schulanfänger beherrschen in der Regel ihre Muttersprache – und müssen in der Schule wissenschaftliche Sprachen lernen. Es ist ein Irrtum anzunehmen, daß

---

11 Lehrer, mit denen ich diese Frage diskutierte, haben darauf hingewiesen, daß »Zerlegen« sich bei der Planung des Taschengeldes als Problem stellt. Dies ist im Prinzip richtig – jedoch nützt einem Kind das Können von Zerlegungsmengen im Zahlenraum von 0 bis 20 nichts, um Anschaffungen mit krummen Preisen (1,75 DM, 2,98 DM etc.) planen zu können.

12 Für evtl. Uneingeweihte: Das Rätsel geht so: es hängt an der Wand, ist grün und macht wau-wau – was ist das?

dies geschieht, indem man Kindern »Fachtermini« beibringt, für die sie keine Begriffe haben; vielmehr muß es (zunächst) darum gehen, das jeweils relevante sprachlich herauszuheben.

Für die Mathematik muß das heißen, zu erkennen, was an einem Vorgang *kalkulierbar* ist, welche Kalkulation sinnvoll ist – und was zum Zwecke der Kalkulation unwesentlich ist. Dies ist m.E. um so eher verständlich (zu machen), je besser man dies mit den schon vorhandenen Begriffen fassen kann. »Zwei *und* noch zwei« bezieht sich auf die Vermehrung (u.U. als Prozess in der Zeit) – »zwei plus zwei« kann einem Kind, das in Berlin mit seiner »Plus-Discount-Kette« aufwächst vorkommen wie »zwei Edeka zwei« oder »zwei Reichelt zwei« – und läßt sich in seiner »Bedeutung« nicht erschließen. Dgl. kann es verstehen, daß »vier *weg* zwei« einen Prozeß des Verminderns betrifft, »vier minus zwei« erinnert es evtl. an die Minus-Diät seiner Mutter, die zum Ärger der Mutter »für die Katz war«, »nichts gebracht« hat. Daß »und« die Operation des »Zusammenzählens« erfordert, während »weg« die Operation des »Abziehens, Rückwärtszählens«, ergibt sich aus der Bedeutung dieser Wörter. Was aber bedeutet »Addition« und das nahezu unaussprechliche Wort »Subtraktion«?

Wenn man, bevor man Aufgaben rechnet (dem Zerlegungs-Gedanken entsprechend richtig) »Sätze« bilden läßt (Plus-Sätze wie: die Mutter hat 7 Kekse gekauft, Lena hat 3 davon gegessen, es bleiben also noch 4 für den Vater übrig), so ist einem Erstklässler aber u.U. gar nicht klar, was »Sätze« sind. U.U. wird es nach dem »Schema« Sätze herleiern: Der Kapitän ist 36 Jahre alt, auf dem Schiff sind 20 Schafe und 16 Ziegen (vgl. Baruk) – oder: ein Lehrer braucht zwei Jahre, um 20 Kinder die Addition und die Substraktion im Zahlenraum von 0 bis 20 zu lehren, 2 Lehrer brauchen ein Jahr. Was »Aufgaben« sind, weiß es jedoch: da muß man was tun, es ist einem etwas »aufgegeben«. Die Vermutung, daß »Sätze« zu bilden dazu führt, daß ein Kind »in der Anwendung« die Operationen selbst aufbaut, dürfte m.E. falsch sein: dies kann man völlig ohne irgendetwas zu verstehen, mechanisch, tun. (Lieblingssatz: 7 irgendwas minus 0 irgendwas gleich 7 irgendwas – d.h.: immer wenn ich 0 einsetze, brauche ich gar nichts zu überlegen.)

Wenn Kinder wirklich verstanden haben, was das »und« bedeutet, und auch verstehen, daß man das einfach als + schreiben kann, dürfte es ein leichtes sein, ihnen zu vermitteln, daß dies auch als »plus« bezeichnet werden kann (wie es auch verstehen kann, daß man statt »Tisch« im Französischen »table« sagt – wenn es weiß, auf welche Bedeutung sich diese Wörter beziehen). Ebenso bezüglich der anderen Operations-Begriffe. Bedeutungen werden *nicht* gelernt, indem man Wörter mit Dingen assoziiert (wie z.B. Skinner annahm), sondern indem Bedeutungen aus Dingen/Situationen/Tätigkeiten erschlossen werden – zu diesen kann man dann Wörter assoziieren.

Etwas schwieriger dürfte es mit dem »=« sein. Als Ergebnis des Prozesses des Vermehrens, Verminderns, Malnehmens oder Ver/Aufteilens bedeutet »ist«

ja: »kommt raus«. Wenn ich dies oder jenes tue, so »ist« das *Ergebnis* folgendes. Was man hinter das »=«Zeichen schreibt, »ist« das Ergebnis einen dynamischen Prozesses bzw. die Lösung eines Rätsels. Insofern hat das Wort »gleich«, obwohl es ein muttersprachliches Wort ist, für ein Kind zunächst keine Bedeutung[13]. Man könnte es also zunächst »ist« zu sagen lehren – und ihm erst dann, wenn es die Logik einer Gleichung versteht, den Terminus »gleich« beibringen.

4.3. *Die Operationen und ihr Gegenstand*

Im Anfangs-Mathematikunterricht geht es auf jeden Fall (gleichgültig, in welch verschiedenen Formen dies versucht wird) um den Zahlbegriff und die »Grundrechenarten«. Wie versucht wurde herauszuarbeiten, scheint sich in der modernen Mathematik-Didaktik (mindestens seit Wittmann) die Meinung gebildet zu haben, daß die Herausbildung des Zahlbegriffs (durch »Behandlung« von Mengen wie Aufteilen etc.) das Erlernen der arithmetischen Operationen quasi impliziert. Hier sind zumindest Zweifel anzumelden. Bereits die grundlegende arithmetische Operation des Ad-dierens kann nicht durch Anschauung einer bzw. Handlung in einer (fixen) Menge demonstriert geschweige denn begriffen werden, denn z.B. die Aufgabe 5=3+2 ist durch einfaches Zählen (zuerst der Obermenge, sodann der Teilmengen, die ja vor einem liegen) lösbar. Die Aufgabe 3+2=? erfordert jedoch, die Teilmengen *zusammen*zuzählen. Insofern muß zwischen Entwicklung des Zahlbegriffs und Vermittlung der arithmetischen Operationen didaktisch ein Unterschied gemacht werden, sollen die Schüler vor Verwirrung geschützt werden.

4.3.1. *Der Zahlbegriff*

Zumindest seit der wissenschaftlichen Beschäftigung mit der ontogenetischen Herausbildung des Zahlbegriffs ist man sich einig darüber, daß der Zahlbegriff nicht durch das »Zählen« erworben wird. »Einszweidrei« läßt sich ebenso an irgendwelchen Gegenständen herleiern wie »ene mene muh« oder »a,b,c...«. Sowohl Wittmann als auch Piaget faßten die Kardinalzahl als (quantitative) Abstraktion von Mengen – in der Mengenlehre wird die Zahl explizit als Mächtigkeit der Menge gefaßt, bezieht sich also auf die Anzahl der Elemente einer Menge, unabhängig von deren Art. Wird jedoch die Aufmerksamkeit zunächst auf die Qualität der Elemente gelenkt, also gewissermaßen z.B. Form, Farbe, Größe, Bedeutung etc. der Elemente eruiert (z.B. alle Elemente sind rot, rund und groß – oder alle Elemente sind Zebras) bzw. nach derartigen Eigenschaften

13 Richtiger gesagt hat »gleich« für ein kleines Kind sehr wohl – aber andere Bedeutung: es steht für Geschwindigkeit! »Gleich, gleich komme ich«, sagen die Eltern – oder »wirst Du wohl gleich ...!«

»abstrahiert« – um dann nach der Anzahl der Elemente zu »abstrahieren« (es sind drei), so wird dies ständig vermischt.

In ADF werden die Zahl-Mengen durch »Kisten« repräsentiert, in die man Kärtchen legt, auf denen Mengen mit gleicher Mächtigkeit dargestellt sind. Gerade daraus, daß auf einem Kärtchen zwar Zebras, auf einem anderen Bälle, auf einem dritten Bleistifte abgebildet sind, sie aber in dieselbe Kiste gehören, weil es jeweils »drei« sind, soll sich der Begriff der drei bilden.

Einer Überlegung Holzkamps folgend kann man die Herausbildung des Zahlbegriffs aber ganz anders konzipieren: die elementarste Wahrnehmungsfunktion, die für die Bildung des Zahlbegriffs notwendig ist, ist die Gliederung des Wahrnehmungsfeldes in Einheiten, gewissermaßen Figuren auf einem Grund. Ob dies Erfassen von »Etwassen« oder »Dingsbümsern« elementarer ist als die Erfassung der Bedeutung dieser Einheiten wäre eine empirisch zu erforschende Frage. Auf jeden Fall richten – wie man jederzeit beobachten kann – Kinder im Einschulungsalter ihre Aufmerksamkeit je nach Intention auf den qualitativen oder quantitativen Aspekt. Wenn ein Kind Lutscher anfordert, kommt es zwar nie auf die Idee, zu prüfen, ob man ihm evtl. Zebras oder Klaviere gegeben hat, wohl aber wird es u.U. prüfen, ob man ihm nicht einfach Drops gibt – und wenn es drei Süßigkeiten anfordert, wird es prüfen, ob es wirklich drei sind (damit sie »für uns drei« reichen).

Um den Zahlbegriff zu bilden käme es also überhaupt nicht darauf an, Eigenschaften von abstrakten Formen oder Gattungsnahmen von Tieren etc. zu beachten um dann gleich wieder von ihnen abzusehen, sondern man könnte beim Lehren an einem »Dingsbums« und dessen Verdoppelung, Vervielfachung etc. ansetzen. Etwas als »Dingsbums« (oder zwei, viele Dingsbümser) zu fassen ist keine »Abstraktion« sondern eher eine »globale« Sicht.

Entsprechend wäre es sinnvoller, statt mit Abbildungen von Gegenständen, mit Symbolen für ein »Dingsbums« zu arbeiten, z.B. einen Kringel oder Perlen oder Plättchen (wie Wittmann es einführte), wobei es gerade darauf ankäme, ein möglichst »bedeutungsloses« Symbol zu finden, weil es ja etwas ganz globales, eben ein Ding schlechthin, symbolisieren soll. Wenn man Kindern mehrere solcher Symbole vermittelt, läßt man sie u.U. an ihrer durchaus vorhandenen Vorstellung des »Dingsbums« irre werden.

Der Zahlbegriff im eigentlichen Sinne ist sicher – wie Piaget sagt – erst ausgebildet, wenn die Konstanz der Anzahl (bei Ausführung einer Null-Operation![14]) erkannt wird. Möglicherweise liegt die Schwierigkeit kleiner Kinder eher im Erkennen von Null-Operationen – und darin, daß »Vergleiche« einem anderen Diskurs angehören als die Feststellung von Vermehrung bzw. Ver-

14 Unter einer »Nulloperation« soll mit Piaget jene Operation verstanden werden, die bezüglich der relevanten Dimensionen bzw. Aspekte nichts verändert – wie das Auseinanderrücken von Blumen an deren Anzahl.

minderung. Insofern ist nicht einzusehen, warum der Zahlbegriff durch Vergleiche (mehr, weniger, gleich) bzw. durch Zerlegen (8=4+4=7+1=3+5 etc.) *erworben* werden sollte – er ist nur nicht anders abprüfbar! Eventuell liegt für Kinder gerade in der vergleichenden Ermittlung von »mehr, weniger, gleich« eine besondere Schwierigkeit, die mit dem Anzahl-Begriff selbst nichts zu tun hat. Am besten kommt diese Schwierigkeit in folgendem Kindersatz zum Ausdruck: »es ist *nicht in echt* gleich« – nachdem vor seinen Augen Wasser in ein anderes Glas gegossen wurde und es nach der Gleichheit gefragt wurde.

Wenn ein Kind ein »Etwas«, ein »Dingsbums« denken kann, kann es auch dessen Vervielfachung denken (»gib mir noch so eins«, »da sind noch solche/welche«). Worauf es bei der »richtigen Reihenfolge« der Zahlen ankommt, wäre die Vermehrung um *je eins* zu verstehen. Sicher können Kinder dies kaum »durch Abzählen« (einszweidrei) begreifen, wohl aber durch das *Hinzufügen* von *genau eins* (eins und noch eins sind zwei, zwei und noch eins sind drei). Hierdurch erschlösse sich gleichzeitig der Sinn der additiven *Operation* (und nicht nur der additiven Komposition), die letztlich darin besteht, eine oder mehrere (durch die Zahl genau angegebene) Vervielfachungen von genau »eins« vorzunehmen – prinzipiell unendlich oft.

Wenn es für Kinder schwer ist, sich die richtige Reihenfolge der Zahlen einzuprägen, ist es wenig sinnvoll, diese »durcheinander« *und ohne Beziehung zwischen ihnen* einzuführen, um dann mühsam die »richtige« Reihenfolge zu lernen. Nur wer die Beziehung zwischen den Zahlen kennt, kann von jeder beliebigen Zahl, auch von 1999 aus, korrekt weiterzählen.

Die Null sollte man erst einführen, wenn sie gebraucht wird – und wie sie gebraucht wird[15]. Wird sie von Anfang an eingeführt und sollen Kinder »Zahlengeschichten« erzählen, und bewegen sich diese nur im operativen Bereich der Addition/Substraktion und findet ein Kind dies keineswegs faszinierend, dient ihm die Null nur zum Vortäuschen emsigen tuns: immer wenn es »plus Null« oder »minus Null« sagt, braucht es eben nichts zu tun, die Ausgangszahl bleibt dann immer gleich. Wenn es später zur Multiplikation und Division kommt, versteht es »gar nichts mehr«: »multipliziert mit Null« verändert die Ausgangszahl, es ergibt plötzlich »null« und »dividiert durch null« darf man überhaupt nicht!! Außerdem ist es verhängnisvoll, die Null als »nichts« zu denken, da sie z.B. am Ende von Zahlen (10, 20, 110) und in der Mitte größerer Zahlen (1001) durchaus eine Bedeutung hat!

---

15 Die leere Menge ist zwar immer Null – aber »Null« bezeichnet keineswegs nur die leere Menge!

4.3.2. *Die Operationen*

Mindestens seit Wittmann scheinen die Operationen im Sinne dessen, was man im Rechen- bzw. Mathematikunterricht *tut*, das »Ordnen«, konkreter das Einkreisen, Zusammenlegen, Auseinanderlegen, paarweise Ordnen etc. zu sein, seit der Mengenlehre kommt noch das »Einpfeilen« dazu. Auch wenn man sich hierbei auf Piaget berufen sollte, so ist das doch völlig falsch. Dies Tun dient ja bei Piaget nur dem Zweck, die Operation des *vergleichens* durchführen zu können, die ebenfalls keine arithmetische Operation ist.

Eine Unordnung zu ordnen ist sicher sinnvoll, wenn man sie zählen will – aber zum einen wird sie in Systemen wie ADF nur notwendig, weil die zu zählenden Gegenstände als Unordnung auf Arbeitsblättern dargestellt werden – und zum anderen ist Ordnen eben Mittel zum Zweck, nicht Selbstzweck. (Auf Arbeitsbögen dargestellte Gegenstände lassen sich nicht ordnen, deshalb wird als »Hilfsoperation« einkreisen, einpfeilen nötig, es müßte den Kindern aber klar werden, daß diese Hilfsoperationen, aber keineswegs die mathematischen Operationen sind.)

Als elementarste und für alle andren grundlegende arithmetische Operation gilt in der Arithmetik das zusammenzählen – nicht das Vergleichen! Der geschriebenen Gleichung (z.B. 4+3=7) ist der Unterschied nicht anzusehen. Sie kann sowohl

- 4 addiert mit 3 *ergibt* 7, als auch
- 4 und 3 *ist ebensoviel wie* 7 bedeuten.

Bezüglich der konkreten Operationen, wie sie auch im Alltag vorkommen, ist dies ein großer Unterschied. Im ersten Fall hat man etwas, es kommt etwas dazu, und man ermittelt das Ergebnis; die Repräsentanten für die Summanden und diejenigen für die Summe sind *identisch*. Im zweiten Fall *vergleicht* man eine Summe, die sich aus 3 und 4 zusammensetzt, mit einer anderen von 7 und ermittelt die Gleichheit – aber die Repräsentanten für die Summanden und die für die Summe sind *nicht identisch*!

Aus den Untersuchungen von Piaget, sowie aus Untersuchungen seines Mitarbeiters Morf (1962) – sowie aus Untersuchungen von Walkerdine (1988) – geht hervor, daß Kinder zunächst eine besondere Schwierigkeit mit der Operation des Vergleichens haben. Wie oben dargestellt, führt bei den von Piaget befragten Kindern die Null-Operation zu falschen Schlüssen: wird nur die Anordnung verändert, nicht aber die Anzahl, so ist diese veränderte Menge für junge Kinder nicht mehr identisch mit der (anzahlmäßig unveränderten) Vergleichsmenge. Wie Morf zeigt, existiert für ein Kind im Schulalter die »Konnexität« der Zahlenreihe nicht: wenn man eine Menge von Dingen, die zunächst deutlich weniger (oder mehr) als eine Vergleichsmenge ist, immer um eins vermehrt (oder verringert), so gehen Kinder bei der Beurteilung dieser in Vermehrung (bzw. Verminderung) begriffenen Reihe von »weniger« (bzw. »mehr«) zu »mehr«

(bzw. »weniger«) über, ohne daß es für sie eine Gleichheit gegeben hat! Die Kinder, die Walkerdine befragt, urteilen zwar bezüglich dreier Gegenstände, die im Verhältnis A>B>C stehen, richtig, daß A »das größte« ist, ebenso, daß A größer als C ist – urteilen aber übereinstimmend falsch, daß A keinesfalls größer als B ist.

Eine Forschungsfrage wäre demnach, ob Kinder derartige Schwierigkeiten auch bezüglich des einfachen Vermehrens haben – und ob sie verwirrt dadurch werden, daß ihnen immer gleichzeitig der Vergleich abgefordert wird; der allgemeinen Beobachtbarkeit nach ist auch schon Kindern vor Schuleintritt klar, daß etwas (eine Menge, eine Anzahl) »mehr« wird, wenn man etwas dazu gibt, also »addiert« im eigentlichen Sinne des Wortes – und daß man diese neue Summe auszählen kann und dann auch »mehr« herauskommen muß.

Wenn es Kindern Schwierigkeiten bereitet, beim zusammenzählen vom ersten Summanden auszugehen, sie sozusagen immer »von vorn« anfangen müssen, so kann dies u.U. einfach daran liegen, daß sie »nicht weiterzählen« können (so wie mancher Erwachsene auch ein Gedicht nicht von einem Stichwort aus oder das Alphabet nicht von einem beliebigen Buchstaben aus weiter sagen kann). Dies dürfte aber bei einiger Übung keine Schwierigkeit sein. Wenn Kinder von jeder beliebigen Zahl aus weiterzählen können, können sie auch verstehen, warum man nicht immer von vorn anzufangen braucht: der erste Summand ist ja bereits »gezählt« (und »zusammenzählen« bedeutet, von da aus »weiterzuzählen«).

Bei der Addition kommt es – wie mehrfach ausgeführt – auf das Hinzufügen an; daß hierfür die selbe Schreibweise wie bei einer Gleichung »üblich« ist, hat mathematische Gründe. Da heute vom ersten Schultag an mit »Arbeitsbögen« gearbeitet wird, müssen auch Schreibformen gefunden werden. Eigentlich könnte man sich damit Zeit lassen. Wenn aber Schreibformen von Anfang an gefunden werden müssen, so macht es Kindern anscheinend einige Schwierigkeiten, Aufgaben wie 4+1=5 zu schreiben. Vermutlich deshalb läßt man Kinder Aufgaben in (relativ abstrakte) »Häuser« schreiben, im Dach steht die Summe, in den beiden Zimmern die Summanden. Damit ist jedoch der zeitliche Prozeß (des Vermehrens) zerstört. (Evtl. ist – wenn die Summe »oben« und die Summanden »unten« stehen, der zeitliche Prozeß, falls er doch gedacht werden kann, sogar »umgekehrt«, denn unsere Leserichtung geht von links nach rechts und von oben nach unten.)

Zu diesen beiden Schreibweisen kommt dann in ADF noch die »Operatorschreibweise« und die Schreibweise in Tabellen. U.U. stellt sich so beim Kind die Vorstellung ein, es gäbe unendlich viele »Rechenarten«, es begreift nicht, daß es sich hierbei um grundsätzlich 4 verschiedene Schreibweisen der 4 Grundrechenarten handelt. (Falls es dies jedoch doch verstehen sollte, könnte sich aber der Eindruck einstellen, die Art der Schreibweise sei völlig beliebig, das + könne man auch »schief« malen, was wiederum auf eine verhängnisvolle

Weise falsch ist, weil ein »schiefes Kreuz« das Zeichen für die Multiplikation ist.)

Vermutlich dürfte es doch für ein Kind einfacher sein, die ihm schwer fallende Additionsschreibweise zu lernen, und zunächst nur die, denn sie entspricht dem zeitlichen Prozeß und dem »Ergebnis« am besten: da sind 4 *und* 1 kommt dazu, dann *ist* das 5. Für das »und« schreibt man ein + und für das »ist« ein =.

Außerdem ist »Flexibilitätstraining« bezüglich der Schreibweise (von Addition und Subtraktion) genau genommen auch falsch: die Zeichen + und – sind wohldefiniert (und genormt und international) – jede Abweichung davon muß einen Grund haben. Die »Flexibilität« der Mathematik liegt *nicht* in der *Schreibweise* – sondern in der Anwendung. Zum Vergleich: es geht nicht darum, ein Werkzeug zu variiern (z.B. Hämmer in Blumenform, in Fischform zu gestalten und damit immer die gleichen Nägel in das gleiche Brett zu schlagen), sondern die Anwendung zu variieren (z.B. mit dem immer gleichen Hammer verschiedenste Probleme mit verschiedensten Stiften und/oder verschiedensten Grundmaterialien zu lösen; es geht nicht darum, einen Hammer auch in nahezu unkenntlicher Form erkennen zu können – sondern zu begreifen, wozu man dieses Werkzeug anwenden kann, wo man ein anderes braucht etc.).

Eine Forschungsfrage wäre auch, ob die Subtraktion nicht erst dann gelehrt werden sollte und gelernt werden könnte, wenn die Operation des Addierens gesichert, begriffen ist. Hierfür sprächen die oben angestellten Überlegungen bezüglich der emotionalen Bewertung derartiger Operationen in der Praxis.

Wenn Zusammenzählen und Abziehen dem Denken nach *keine* Gleichung ist, wäre es völlig verkehrt, Kinder (zwecks »Flexibilitäts-« oder »Mobilitätstraining«) von Anfang an Gleichungen (in Form von »Platzhalteraufgaben«) rechnen zu lassen. Dies erschwert, das Zusammenzählen zu begreifen, und verführt – solange die Kinder die Subtraktion noch nicht kennen – nur zum raten. Ebenso unsinnig ist es, »Zerlegungssätze« Gleichungen zu nennen, um sie dann ins Verhältnis zu Ungleichungen zu setzen.

Es scheint sich eingebürgert zu haben, unter »Automatisieren« nicht mehr wie früher »üben, üben« zu verstehen, sondern »Auswendiglernen«, so daß die Kinder heute auch ein »kleines eins plus eins« auswendig können sollen (alle Additionen und Subtraktionen von 0 bis 20). Etwas »automatisiert sich«, wenn man es oft genug getan und begriffen hat, quasi von selbst. Wozu soll man etwas auswendig lernen, was man doch jederzeit (re)konstruieren kann? Und gerade, daß man »Rechenaufgaben« nicht auswendig zu lernen braucht, sondern jederzeit – mit immer dem gleichen Ergebnis – ausrechnen kann, macht m.E. die Faszination aus.

Manch einer mag einwenden, daß »Automatismen« Zeit sparen. Richtig. Aber Automatismen sind auch Fehlerquellen – und Automathe sind in der Lage, aus der Länge und Breite eines Schiffes das Alter des Kapitäns »auszurechnen«!

4.4. *Schlußbemerkung*

Es mag so aussehen, als würde hier die Rückkehr zum »alten Rechenunterricht« propagiert. Dieser bestand jedoch allen in der Literatur auffindbaren Zeugnissen nach im »Rechendrill«, also letztlich im sturen Auswendiglernen von Rechenaufgaben und Rechenregeln (und möglichst raschem Kopfrechnen).

Wenn hier vorgeschlagen wird, den Anfangsunterricht wieder »Rechnen« zu nennen, dann deshalb, weil dieses Wort den Schulanfängern verständlich sein dürfte – und auch angibt, was da getan und gelernt werden soll.

Ansonsten müßte es darum gehen, im Rechen- wie im Mathematikunterricht überhaupt nichts auswendig zu lernen, sondern gerade die *Operationen* so weit zu begreifen, daß man sie verinnerlichen kann. Dies hätte zudem den Vorteil, daß sie nicht wieder vergessen werden können. Wie z.B. Galperin überzeugend gezeigt hat, dauert das zwar ein bißchen länger als »auswendig lernen«, führt dann aber zu fehlerloser Anwendung. Zudem kann jeder, der ein Prinzip begriffen hat, »die Regel« jederzeit (re)konstruieren.

Es sollte darum gehen, das wissenschaftliche Interesse der Kinder zu wecken – *und* ihnen die Nützlichkeit des Gelernten in ihrem konkreten Alltag aufzuweisen. Vor allem aber sollte es darum gehen, »Verwirrungen« aus Mathematik-Lehrbüchern bzw. -Arbeitsbögen zu eliminieren – und keine neuen einzubauen.

5. *Zur Therapie von »Arithmasthenie« oder »Dyscalculie«*

Wenn man davon ausgehen muß, daß alle Fehler, die Schulkinder bezüglich der Mathematik machen, einerseits Zeichen davon sind, daß sie denken (Baruk 1989), andererseits durch das, wie sie etwas lernen sollten, verursacht sind (Baruk 1989, Walkerdine 1988), ist es selbstverständlich, daß es keinerlei Sinn haben kann, mit Kindern, die im Mathematikunterricht versagen, »zu üben«, und dies sogar mit dem in der Schule verwendeten Material. Etwas, was man nicht begriffen hat, begreift man auch nicht durch »Üben«[16] – und gerade dieses Material hat ja zu den Irrtümern im kindlichen Denken geführt! Da andererseits Kinder, die in der Schule »versagen«, aber doch an ihrem Erfolg gerade mit dem in der Schule verwendeten Material gemessen werden (und immer gemessen werden werden!), gilt es dennoch, ihnen zu ermöglichen, das, was in der Schule von ihnen mit einem bestimmten Material gefordert wird, zu lernen.

---

16 Ein Mathematik-Therapeut stellte mir unlängst ein Übungsprogramm zur Verfügung. Nachdem ich es richtig gestartet hatte, erschien die Aufgabe »8+5= ?« Ich tippte flugs 12 ein, drückte auf »return« – die Zahl verschwand. Ich versuchte es mit anderen Knöpfen, erfolglos. Als ich endlich darauf kam, daß ich ja 13 eintippen müßte, meldete der Computer: Du hast 3 Fehler gemacht. Was soll ein Kind, das die Addition nicht verstanden hat, mit solchen »Übungen« begreifen?

Dies scheint unmöglich, ist es aber nicht unbedingt. – Oft genügt es, Kindern die Möglichkeit zu geben, ihre Fragen zu stellen und so die Gründe für ihre Irrtümer selbst aufzudecken. Wie Fingerhut und Manske (1984) an Hand von »Protokollen einer Heilung« darstellen, genügte es dem Schüler Rolf, die Frage zu stellen, warum etwas, wenn man es »halbiert«, eine »Weniger-Aufgabe« ist – warum heißt es 6-4=2, wenn man 6 Kullern hat und 4 davon halbiert? Die Antwort, daß die Kullern-halbierende Lehrerin diese *wegstreichen* wollte, erschloß Rolf sozusagen blitzartig den Sinn des Abziehens – bei Weniger-Aufgaben. Ebenso erschloß sich ihm das »ist gleich«, als ihm deutlich gemacht werden konnte, daß hinter dem Gleichheitszeichen ein Ergebnis steht. Schließlich erschloß sich ihm auch die Division, als er verstehen konnte, daß es ums gerechte Verteilen (von Pfennigen auf Puppen) gehen soll. Die Gerechtigkeit faszinierte ihn geradezu und gab ihm einen Einblick in die »Schönheit der Mathematik«.

Immerhin ist anzunehmen, daß Kinder, die als Versager bezüglich der Mathematik in der Schule gelten, ihre Fragen nicht mehr stellen können – allzuviel ist durcheinandergeraten. Wie Baruk zeigt, bleibt dem »Therapeuten« bzw. Nachhilfelehrer hier nichts anderes übrig, als die Fehler aus eben dem Schulmaterial zu erschließen. Welche Art von »gegängelter Erfahrung« war es, die zu diesem Mißverständnis Anlaß gab?

Leider genügt es meist keineswegs, dies einfach »richtig zu stellen«, wenn das, was in der Schule erwartet wird, eigentlich Voraussetzungen hat, die noch nicht gelehrt wurden und auch in kurzer Zeit nicht gelernt werden können.

Um z.B. »Platzhalteraufgaben« vom Typ ?-2 = 13 zu lösen, wäre es sinnvoll, wenn ein Kind nicht nur addieren und subtrahieren könnte, sondern wenn es Gleichungen lösen könnte, und insofern verstehen könnte, daß es – um die Lösung zu finden – 2 und 13 *zusammenzählen* muß. Dies würde jedoch voraussetzen, daß es solche Aufgaben als Gleichung versteht, also das Zeichen = als Aufforderung zu einem Vergleich etc. Andererseits braucht es dies – angesichts dieser Zahlen – letztlich auch nicht zu verstehen, man kann derartige Aufgaben auch per Legen und Abzählen lösen – falls sich dem Kind erschließt, was es da wie legen und abzählen soll. Dies ist wiederum schwierig, wenn es immer nur »Zerlegungsmengen« gelernt hat, und nie, wie man zusammenzählt und abzieht.

Oder die Sache mit der tückischen Null. Wurde sie erst mal als »Nichts« gelehrt und gelernt, ist sicher schwierig zu vermitteln, warum man sie z.B. bei der Zahl 102 nicht einfach »weglassen« darf, warum, wenn man 52 davon (schriftlich) abzieht, nicht einfach 100 herauskommt (da man von nichts schließlich nichts abziehen kann, die 5 insofern »entfällt«). Warum kann man die Null hinter dem Komma »weglassen«, nicht aber vor dem Komma? Warum kann man die Null vor dem Komma jedoch weglassen im Falle, daß davor keine andere Zahl steht? (Gerster, 1989, rät, die Null als Rechenzahl stärker zu betonen – aber gerade dadurch, daß man »+0« und »-0« als Operationen, die nichts verändern, gelernt hat, kommt ja dieser Fehler zustande!)

Als »deutlicher Hinweis« auf »Arithmasthenie« wird bezeichnet, wenn das Ergebnis einer Rechnung keinerlei Sinn hat – wenn also das Ergebnis einer Subtraktion größer ist als der Minuend, oder wenn ausgerechnet wird, daß in einem Zug 247,35 Personen sitzen (Schöniger, 1989). Baruk, die Schüler angesichts derartiger Merkwürdigkeiten befragte, ob dies denn möglich sei, erhielt zur Antwort: Ja, in Mathematik! Es handelt sich also keineswegs um Menschen mit einer »Teilleistungsschwäche« im rechnerischen Bereich, sondern eben um Automathen, »Mathematik-Automaten«, denen sich der Sinn keiner mathematischen Operation je erschlossen hat; da derartige Kinder ja immerhin »rechnen«, muß es sich um eine von Schulen erzeugte »Unfähigkeit« handeln.

Verwunderlich ist dies angesichts der derzeitigen Lehr-Materialen eigentlich nicht – was eher verwunderlich ist, daß es Psychologen so wundert, daß sie auf eine »Teilleistungsschwäche« schließen. Wer sein erstes Schuljahr über »Zerlegungsmengen« auswendig lernen sollte und diese dann in »Zerlegunge-Sätze« richtig einbauen sollte, wer nicht gelernt hat, daß die Zahlenreihe sich um je eins vermehrt – warum sollte der es nicht für möglich (»in Mathematik«) halten, daß 3-2=5? Er hat nichts als einen einzigen Strich »vergessen«!

Aber es geht bei jenen, die Arithmastheniker oder Dyscalculatoren genannt werden, nicht nur um diesen einen einzigen Strich. Es scheint keineswegs so zu sein, daß jene, die einen einzigen Strich vergessen, die Lehrer für »übergenau« halten, die ihnen eine solche Lappalie ankreiden. Im Gegenteil. Es spricht alles dafür, daß »in Mathematik zu versagen« chaotisiert. Wie Walkerdine hervorhebt, kann man mit Mathematik zwar nicht die Realität kontrollieren – aber mathematische Strukturen, die einen gelehrt werden, nicht zu durchschauen, heißt über keinerlei Kontrolle zu verfügen, im Chaos zu leben. Auch Baruk beschreibt ihre Schülerin Sophie als sozusagen überschäumend von Fragen, die in einem Verhalten enden, das neuerdings vermutlich mit »MCD« gefaßt würde: ein (weiblicher) Zappelphilipp.

Vermutlich wird also Therapeuten, die es mit »Arithmasthenikern« versuchen wollen, nichts anderes übrig bleiben, als in Kooperation mit Mathematik-Didaktikern Forschungsarbeit zu leisten – und verständlichere Lehrgänge zu entwickeln.

Literaturverzeichnis

Baruk, S., 1989: Wie alt ist der Kapitän? Basel; Boston; Berlin

Fingerhut, R. & Manske, Ch., 1984: »Ich war behindert an Hand der Lehrer und Ärzte« – Protokoll einer Heilung. Reinbeck bei Hamburg

Galperin, P.J., 1969: Die Entwicklung der Untersuchungen über die Bildung geistiger Operationen. In: Hiebsch, H. (Hg.): Ergebnisse der sowjetischen Psychologie, S. 367-405, Stuttgart

Gerster, H.-D., 1989: Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren. In: Grundschule, 21. Jg., H. 12, S. 26-29

Holzkamp, K. (unveröffentliches Manuskript)
Leontjew, A. N., 1982: Tätigkeit, Bewußtsein, Persönlichkeit, Köln
Morf, A., 1962: Recherches sur l'origine de la connexité de la suite des premiers nombres. In: Piaget, J. (ed.): Structures numeriques elementaires. Etudes d'épistemologie génétique, Vol. XIII, Paris, 71-103
Müller, G. & Wittmann, E. Ch., 1984: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig/Wiesbaden
Odenbach, K., 1964 Zur Einführung, in: Rechenunterricht und Zahlbegriff-Theorie und Praxis in der Schule, Braunschweig
Panknin, M. und Mitarbeiter, 1984: Mathematik 1, Arbeits-Diagnose-Förderblätter, Schülermaterial und Kommentar zum Schülermaterial. Berlin
Papert, S., 1980: Gedankenblitze. Reinbeck bei Hamburg
Piaget, J., 1972: Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Wien/München/Zürich
Piaget, J., 1973: Einführung in die genetische Erkenntnistheorie, Frankfurt a. M.
Piaget, J. & Szeminska, A., 1975: Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde, Stuttgart (Orig. 1941)
Picht, G., 1965: Die deutsche Bildungskatastrophe, München
Resag, K., 1962: Kind und Zahl, München
Resag, K. u.a., 1965: Die Zauberfibel, Braunschweig
Ruß, H.-J., 1990: Von der Legasthenieforschung und Legasthenikerförderung zur Hochbegabtenforschung und -förderung. Unveröffentlichte Dissertation, Berlin
Schöniger, J., 1989: Die Arithmasthenie (Rechenschwäche) – ein unbekanntes Problem. Auch wenn sie vielen bekannt ist. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, H. 3, 94-100
Steiner, G., 1973: Mathematik als Denkerziehung, Stuttgart
Walkerdine, V., 1988: The Mastery of Reason. London
Wittmann, J., 1958: Einführung in die Praxis des ganzheitlichen Gesamtunterrichts insbesondere des ganzheitlichen Rechenunterrichts im ersten Schuljahr. Dortmund